Laurea di Primo Livello in Matematica
Fisica Matematica — Secondo Compitino
22 Marzo 2007

Importante: *Non scrivere su questo foglio. Scrivere la soluzione degli esercizi A e B su due fogli distinti con il vostro nome e cognome.*

A Sia $Oxyz$ un riferimento cartesiano associato ad un sistema inerziale. Si consideri un punto materiale P di massa $m > 0$ vincolato senza attrito su di una guida circolare $x^2+y^2 = R^2$ con y verticale ascendente: $\mathbf{g} = -g\hat{y}$, $g > 0$. Oltre alla gravità (e alla reazione vincolare) su P agisce la forza di viscosità:

$$\mathbf{F}^{vis} = -k\,\dot{OP} \qquad (k > 0)$$

a] Introducendo l'usuale parametro Lagrangiano angolare ϑ, tale che $\vartheta = 0$ corrisponde alla configurazione $OP = (0, -R, 0)$, provare, o confutare, che $\vartheta = 0$ è un equilibrio asintoticamente stabile.

b] esiste qualche valore di $k > 0$ tale che $\vartheta = \pi$ sia stabile?

c] se si aggiunge anche una resistenza di mezzo di tipo aerodinamico:

$$\mathbf{F}^{idr} = -\nu\,|\dot{OP}|^2 \operatorname{vers}\dot{OP} \qquad (\nu > 0)$$

la risposta data al punto a] è ancora vera?

B Nel piano Oxy di un riferimento inerziale $Oxyz$, con l'asse y verticale ascendente, si consideri il sistema costituito da un disco di massa M e raggio r, che rotola senza strisciare sull'asse x, da un' asta AB di lunghezza l e massa m *tutta concentrata nel punto* B, la cui estremità A è vincolata in modo liscio al baricentro G del disco, e da un punto P di massa m vincolato ad un punto P della circonferenza del disco. Tra il baricentro G del disco ed il punto $G' = (0, r)$ dell'asse y è tesa una molla lineare di costante elastica $h > 0$. Si scelgano come parametri lagrangiani l'ascissa x del baricentro del disco e l'angolo ϑ formato dalla direzione negativa dell'asse delle y con il segmento AB, valutato in senso antiorario. Si supponga che, quando $x = 0$, il punto P del disco si trovi nell'origine O.

a] Scrivere il potenziale delle forze (gravità ed elastica) agenti e determinare le configurazioni di equilibrio nell'ipotesi $r > \frac{2mg}{3\pi h}$

b] calcolare l'energia cinetica del sistema

c] calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilibrio stabile a meno della risoluzione dell'equazione di secondo grado.

Soluzione B. Si indichi con ϕ l'angolo tra la direzione negativa dell'asse delle y e il segmento GP, valutato in senso orario. Allora, date le condizioni iniziali (quando $x = 0$, il punto P del disco si trova nell'origine O) vale la relazione $x = r\phi$.

Il sistema è soggetto alla gravità e alla forza elastica, entrambe conservative, aventi potenziale

$$U^{el} = \frac{h}{2}x^2, \quad U^g = mg(y_P + y_B)$$

ove

$$y_P = r(1 - \cos\phi) = r(1 - \cos(\frac{x}{r})), \quad y_B = -l\cos\theta$$

Gli equilibri sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$U_x = hx + mgr\sin(\frac{x}{r})\frac{1}{r} = 0,$$
$$U_\theta = mgl\sin\theta = 0.$$

L a seconda equazione porge subito $\theta = 0, \pi$, mentre la prima si discute trovando i punti di intersezione tra la funzione $y = x$ (retta) e la funzione $y = -\frac{mg}{h}\sin(\frac{x}{r})$. Si vede subito che, stante la condizione $r > \frac{2mg}{3\pi h}$, l'unico punto di intersezione è l'origine, $x = 0$.

Dal momento che le forze sono tutte conservative, discutiamo la stabilità degli equilibri con THND. Calcolando la matrice hessiana del potenziale si trova

$$H_U(0,0) = \begin{pmatrix} h + \frac{mg}{r} & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix}, \quad H_U(0,\pi) = \begin{pmatrix} h + \frac{mg}{r} & 0 \\ 0 & -mgl \end{pmatrix}$$

per cui l'unico punto stabile è $(0,0)$.

Energia cinetica. Si ha $T = T_{disco} + T_B + T_P$. L'energia cinetica del disco si trova usando il Teorema di Konig

$$T_{disco} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}(\frac{\dot{x}}{r})^2$$

L'energia cinetica dei due punti B e P si trova per esempio calcolando

$$x_P = x - r\sin\phi, \qquad x_B = x + l\sin\theta$$

derivando, quandrando e sommando. Dopo calcoli elementari, anche se un po' fastidiosi, si trova

$$T = \frac{1}{2}[\frac{3}{2}M + 2m(1 - \cos(\frac{x}{r})) + m]\dot{x} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\cos\theta\dot{x}\dot{\theta}.$$

Infine, la matrice dell'energia cinetica calcolata in $(0,0)$ si riduce a

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M + m & ml \\ ml & ml^2 \end{pmatrix}$$

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni dell'equazione in ω^2

$$\det(H_U(0,0) - \omega^2 A(0,0)) = 0.$$