Esercizio **A** del secondo compitino 2007

**A** Sia $Oxyz$ un riferimento cartesiano associato ad un sistema inerziale. Si consideri un punto materiale $P$ di massa $m > 0$ vincolato senza attrito su di una guida circolare $x^2+y^2 = R^2$ con $y$ verticale ascendente: $\mathbf{g} = -g\hat{y}, \;\; g > 0$. Oltre alla gravità (e alla reazione vincolare) su $P$ agisce la forza di viscosità:

$$\mathbf{F}^{vis} = -k\,\dot{OP} \qquad (k > 0)$$

a] Introducendo l'usuale parametro Lagrangiano angolare $\vartheta$, tale che $\vartheta = 0$ corrisponde alla configurazione $OP = (0, -R, 0)$, provare, o confutare, che $\vartheta = 0$ è un equilibrio asintoticamente stabile.

b] esiste qualche valore di $k > 0$ tale che $\vartheta = \pi$ sia stabile?

c] se si aggiunge anche una resistenza di mezzo di tipo aerodinamico:

$$\mathbf{F}^{idr} = -\nu\,|\dot{OP}|^2 \,\mathrm{vers}\,\dot{OP} \qquad (\nu > 0)$$

la risposta data al punto a] è ancora vera?

**Soluzione.**

a]

$$T(\vartheta, \dot\vartheta) = \frac{1}{2} m R^2 \dot\vartheta^2 \qquad \mathcal{U}^{grav}(\vartheta) = -mgR\cos\vartheta$$

$$dL^{\mathbf{F}^{vis}} = -kR\dot\vartheta \cdot dP = -kR\dot\vartheta\mathbf{t} \cdot Rd\vartheta\mathbf{t}$$

$$Q^{vis}(\vartheta, \dot\vartheta) = -kR^2\dot\vartheta$$

Equazione di Lagrange:

$$mR^2\ddot\vartheta = -mgR\sin\vartheta - kR^2\dot\vartheta$$

$$\ddot\vartheta = -\frac{g}{R}\sin\vartheta - \frac{k}{m}\dot\vartheta$$

al prim'ordine:

$$\zeta := \begin{pmatrix}\vartheta \\ v\end{pmatrix} \qquad \dot\zeta = Z(\zeta) : \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vartheta \\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{g}{R}\sin\vartheta \quad -\frac{k}{m}v\end{pmatrix}$$

Nell'equilibrio $\begin{pmatrix}\vartheta \\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$ il sistema linearizzato è

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\vartheta \\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{g}{R}\vartheta \quad -\frac{k}{m}v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{R} & -\frac{k}{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vartheta \\ v\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{g}{R} & -\frac{k}{m}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{R} = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\frac{k}{m} \pm \sqrt{(\frac{k}{m})^2 - 4\frac{g}{R}}}{2}$$

Per ogni scelta di $m, g, k$ negli strettamente positivi (verificarlo!):

$$\mathcal{R}e(\lambda_{\pm}) < 0$$

e si ha l'asintotica stabilità (primo metodo di Liapunov).

b] Per l'equilibrio $\begin{pmatrix} \vartheta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ il sistema ivi linearizzato conduce al problema spettrale

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{g}{R} & -\frac{k}{m}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda - \frac{g}{R} = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\frac{k}{m} \pm \sqrt{(\frac{k}{m})^2 + 4\frac{g}{R}}}{2}$$

Per ogni scelta di $m, g, k$ negli strettamente positivi $\lambda_+$ è sempre un numero reale positivo: si ha l'instabilità (primo metodo di Liapunov).

c] Nulla viene modificato rispetto alle conclusioni di a) perché la forza $\mathbf{F}^{idr}$ introduce un termine quadratico in $\dot{\vartheta}$, e dunque in $v$, che non comparirà nella linearizzazione.