LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
ESAME — 5 Dicembre 2007

Esercizio A.

A.1 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) = f(x_1, x_2)$ una funzione C^1 tale che f è "omogenea" di grado $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$, cioè:

$$f(\lambda x) = \lambda^n f(x), \quad \forall \lambda > 0 \qquad \text{pertanto} \;\; nf = x \cdot \nabla f;$$

inoltre sia

$$f(0) = 0, \quad \nabla f(0) = 0, \quad f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Si consideri l'equazione differenziale in $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) - x_1 \\ \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) - x_2 \end{cases}$$

Dimostrare che $x = (x_1, x_2) = 0$ è un equilibrio stabile. E' asintoticamente stabile? (Suggerimento: si scelga una opportuna funzione di Liapunov).

A.2 Si consideri l'equazione differenziale in $\mathbb{R}$,

$$\dot{x} = -\mathrm{sgn}(x)\sqrt{|x|} \qquad \left(\text{dove: } \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases} \right)$$

Dimostrare che $x = 0$ è un equilibrio stabile. E' asintoticamente stabile? (Suggerimento: si scelga una opportuna funzione di Liapunov).

Esercizio B.

Il riferimento $Oxyz$, ove y è verticale ascendente, ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse y rispetto ad un riferimento inerziale. Nel piano Oxy si consideri il sistema costituito da un disco omogeneo massa M e raggio R vincolato in modo liscio ad una guida rettilinea fissa formante un angolo di $\frac{3\pi}{4}$ con la direzione positiva dell'asse orizzontale x. Il disco è soggetto alla forza di gravità e alla forza elastica dovuta ad una molla lineare tesa tra il baricentro G del disco e il punto di intersezione A tra la guida rettilinea e l'asse verticale y. Volendo studiare il moto del sistema rispetto al riferimento non inerziale, si introduce la coordinata s ascissa sulla guida, orientata in senso concorde alla gravità e con origine nel punto A, per cui $s(A) = 0$.

1. Scrivere l'energia potenziale e l'energia cinetica del sistema uno-dimensionale e disegnare il ritratto in fase nel piano $(\dot{s}, s)$ al variare di ω nei reali positivi (tre casi).
2. Scrivere la Lagrangiana del sistema, le corrispondenti equazioni di Lagrange e la linearizzazione del sistema al primo ordine corrispondente attorno ad un equilibrio. Indagare la stabilità dell'equilibrio con il primo metodo.
3. Determinare la frequenza di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella ripondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

SOLUZIONI

Esercizio B

Nel riferimento rotante, il disco è soggetto alla forze elastica, centrifuga e di gravità, tutte conservative. Le componenti Lagrangiane della forza di Coriolis sono nulle (verificarlo per esercizio). Detta h la costante elastica della molla, l'energia potenziale complessiva è

$$U(s) = \frac{1}{2}(h - \omega^2 \frac{M}{2})s^2 - \frac{M}{2}(\omega^2 R + g\sqrt{2})s + cost. = \frac{1}{2}as^2 - bs + cost., \quad a = (h - \omega^2 \frac{M}{2}), \quad b > 0.$$

Se $a \neq 0$ l'energia potenziale è una parabola e l'unico equilibrio è nel vertice $s^* = b/a$. Se $a = 0$, l'energia potenziale è una retta e non vi sono equilibri (il disco è soggetto alla sola forza di gravità. Se $U''(s^*) = a \neq 0$, la stabilità si puo' accertare con THND (stabile se $a > 0$, instabile se $a < 0$).

Energia cinetica. Dal teorema di Konig e dalla condizione di puro rotolamento $s = r\theta$ si trova subito che

$$T = \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(I_G + MR^2)\frac{\dot{s}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}M\dot{s}^2 = \frac{1}{2}A\dot{s}^2$$

1. Il ritratto di fase è come segue:
$a > 0$: ellissi concentriche di centro $s^* > 0$ (equilibrio stabile)
$a = 0$: parabole con asse l'asse s traslate orizzontalmente
$a < 0$: sella (equilibrio instabile) di centro $s^* < 0$
2. La lagrangiana $L = T - U$ è immediata. Le equazioni di Lagrange sono

$$A\ddot{s} + as - b = 0$$

che ridotte al primo ordine sono già lineari e si scrivono

$$\dot{s} = v, \qquad \dot{v} = -\frac{a}{A}s + \frac{b}{A}$$

La matrice $X'(z^*)$ del sistema linearizzato attorno a $z^* = (s^*, 0)$ è

$$X'(z^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a}{A} & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-a}{A}}$$

e quindi il primo metodo asserisce l'instabilità dell'equilibrio nel caso $a < 0$ perchè $Re(\lambda > 0)$ e non dice nulla nell'altro caso.

3. La frequenza di piccola oscillazione si determina dall'equazione

$$\det(U''(s^*) - \omega^2 A) = a - \omega^2 A = 0$$

che coincide con la frequenza dell'oscillatore armonico descritto dalle equazioni linearizzate al punto 2.