
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
PRIMA PROVA PARZIALE — 13 Aprile 2016

Esercizio A

Nel piano Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y rivolto verso l'alto si consideri il sistema formato da un'asta AB di massa m e lunghezza l i cui estremi A e B sono vincolati in modo liscio a muoversi lungo gli assi y e x rispettivamente e da un disco di massa M e raggio R che rotola senza strisciare lungo l'asse x . Il riferimento $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante ω diretta come l'asse y . Si vuole descrivere il moto del sistema nel sistema rotante. Scegliere una coordinata per la posizione dell'asta e una per la posizione del disco.

- a) scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema.
- b) (facoltativo) scrivere le equazioni di Lagrange del sistema

Esercizio B

Nel piano Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y diretto verso l'alto giace una guida curvilinea di equazione $y = f(x)$, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Un punto materiale P di massa m si muove lungo la guida supposta liscia sotto l'azione della gravità. Il riferimento $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante ω diretta come l'asse y . Si vuole descrivere il moto del punto nel sistema rotante. Si riferisca la posizione del punto P alla coordinata $x \in \mathbb{R}$

- a) scrivere il vettore OP , la velocità $v = dOP/dt$ e l'energia $E = T + U$ lungo un moto $x(t)$
- b) nell'ipotesi che $f'(0) = 0$, dire se $x = 0$ è una configurazione di equilibrio e dare una condizione sufficiente per la stabilità dell'equilibrio. Motivare la risposta sulla base dei teoremi del corso.
- c) tracciare il ritratto di fase qualitativo del sistema nell'intorno dell'origine al variare di ω (prendendo cioè ω come parametro).

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente a **una** a scelta delle domande seguenti

- 1 Teoria del moto sotto forze centrali. Deduzione delle leggi di Keplero.
- 2 Enunciato e dimostrazione del teorema di Lyapunov sulla stabilità dell'equilibrio. Dare preliminarmente la definizione di equilibrio stabile e asintoticamente stabile

Dimostrare **due** dei teoremi seguenti

- 3 Enunciato e dimostrazione del teorema di Steiner
- 4 Relazione area periodo
- 5 Formula di Galileo sulla relazione tra le accelerazioni nei sistemi di riferimento

-
- Scrivere nome e cognome **in stampatello** su ogni foglio consegnato
 - Consegnare solo la bella copia
-

SOLUZIONI

Esercizio A

Fatto a lezione.

Esercizio B

a) La posizione del punto materiale è $OP = (x, f(x))$ con velocità

$$v = dOP/dt = (\dot{x}, f'(x)\dot{x})$$

e energia cinetica

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + f'^2\dot{x}^2) = \frac{m}{2}a(x)\dot{x}^2, \quad a = 1 + f'^2 > 0$$

L'energia potenziale gravitazionale vale $U^g(x) = mgy = mgf(x)$ e quella centrifuga vale $U^{cf} = -m\omega^2 x^2/2$. Il sistema è a vincoli lisci e forze conservative per cui vale la conservazione dell'energia. Le curve di livello si tracciano a partire dal grafico di $U(x)$.

b) la conservazione dell'energia si scrive

$$e = T + U = \frac{m}{2}a(x)\dot{x}^2 + U(x)$$

e derivando si ha

$$0 = ma\dot{x}\ddot{x} + \frac{m}{2}\dot{x}^2 a'(x) + U'(x)\dot{x}$$

Ove $\dot{x} \neq 0$, l'equazione si scrive

$$ma\ddot{x} = -[\frac{m}{2}\dot{x}^2 a'(x) + U'(x)]$$

e al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{[\frac{1}{2}\dot{x}^2 a'(x) + U'(x)]}{a(x)} \end{cases}$$

Le configurazioni di equilibrio sono quelle per cui

$$U'(x) = mgf'(x) - m\omega^2 x = 0$$

Nell'ipotesi che $f'(0) = 0$, l'origine è configurazione di equilibrio. Se è un minimo del potenziale, allora è stabile per il Teorema di Liapunov. Quindi una condizione sufficiente per la stabilità è

$$U''(0) = mgf''(0) - m\omega^2 > 0.$$

Al variare di ω , l'origine è un minimo o un massimo del potenziale. Le curve di livello dell'energia (ritratto in fase) sono qualitativamente simili a quelle dell'oscillatore o del repulsore armonico rispettivamente.