LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
PRIMO APPELLO — 15 Giugno 2016

Parte A. Esercizi

A1. Nel piano verticale Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y verticale ascendente si consideri il sistema soggetto a gravità costituito da un punto materiale P di massa m vincolato in modo liscio a scorrere sulla guida liscia di equazione $y = f(x) = x^3 - x$. Si prenda come coordinata lagrangiana del punto la sua ascissa x di modo che $OP(x) = (x, f(x))$. Il sistema di riferimento $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante ω diretta come l'asse verticale y.

a) Scrivere l'energia potenziale del sistema, l'energia cinetica, la lagrangiana del sistema nel riferimento rotante e calcolare la componente lagrangiana della forza di Coriolis

b) si studi la stabilità degli equilibri nel sistema rotante giustificando i risultati con i teoremi visti nel corso. Cosa succede se si aggiunge una forza viscosa di componente lagrangiana $Q(\dot{x}) = -k\dot{x}, k > 0$?

c) si supponga ora che in luogo del punto P vi sia un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza l contenuta nel piano Oxy e con il baricentro G libero di scorrere sulla guida. Si riferisca la posizione dell'asta AB alla ascissa x del baricentro e all'angolo θ tra l'asta AB e l'asse y. Scrivere la nuova energia cinetica e potenziale del sistema nel riferimento rotante.

d) Si supponga ora che $\omega = 0$, il punto P è di nuovo presente sulla guida mentre l'asta AB ha il baricentro vincolato a scorrere sull'asse orizzontale x. Si riferisca la posizione dell'asta alle coordinate $s = x_G$, θ definito sopra, e il punto a $x = x_P$. Si scriva l'energia cinetica e potenziale del nuovo sistema. Quali sono gli integrali primi del nuovo sistema? Che interpretazione fisica hanno?

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente a due delle domande seguenti

1 Teoria del corpo rigido non soggetto a momenti

2 Problema del moto di un punto sotto forze centrali

3 Relazione tra moti spontanei e geodetiche su superficie bidimensionale liscia

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

3 Teorema di Lagrange-Dirichlet sulla stabilità degli equilibri

4 Equazioni Cardinali per un sistema particellare soggetto a forze che soddisfano il principio di azione e reazione

---

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)*
- *Consegnare solo la bella copia*

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

a) L' energia potenziale è la somma dell'energia gravitazionale e di quella centrifuga

$$U = U^g + U^{cf} = mgf(x) - \frac{m\omega^2}{2}x^2 = mg(x^3 - x) - \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}mv_P^2 = \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2] = \frac{1}{2}m(1 + f'(x)^2)\dot{x}^2$$

mentre la lagrangiana è $L = T - U$. La componente Lagrangiana della forza di Coriolis $f = -2m\omega \times v_P$ è nulla perchè i vettori ω, v_P, w sono complanari.

b) La stabilità del sistema 1-dim si studia guardando i punti critici del potenziale

$$U'(x) = mg(3x^2 - 1) - m\omega^2 x = m[3gx^2 - \omega^2 x - g] = 0$$

Si tratta di una parabola con concavità verso l'alto e $\Delta = b^2 - 4ac = \omega^4 + 12g^2 > 0$. Vi sono quindi due radici reali x_1 e x_2, con $x_1 < x_2$. Dallo studio del segno di U' si vede che x_1 è un massimo locale mentre x_2 è un minimo. Quindi x_1 è instabile (THND) mentre x_2 è stabile (THND, TLD). Se si aggiunge una forza viscosa, questa è nulla negli equilibri, che non si modificano. THND non pi applicabile, quindi possiamo accertare la stabilità di x_2 con TLD solamente.

c) Se ora consideriamo l'asta AB, il potenziale gravitazionale non cambia, mentre a quello centrifugo dobbiamo aggiungere il termine del Teorema di Stainer

$$-\frac{1}{2}\frac{\omega^2 ml^2}{12}\sin^2\theta$$

mentre all'energia cinetica dobbiamo aggiungere il termine del T di Konig

$$\frac{1}{2}\omega I_G \omega = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$$

d) L'energia cinetica del punto è quella del punto a) mentre l'energia potenziale dell'asta è

$$T_{AB} = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$$

L'energia potenziale del sistema è la sola energia gravitazionale del punto. Quindi L è

$$L = T_P + T_{AB} - U^g = \frac{1}{2}m(1 + f'(x)^2)\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2 - mgf(x)$$

La lagrangaina quindi non dipende dalle coordinate s e θ. Vi sono quindi, oltre ad $E = T + U$ due integrali primi di ciclicità, corrispondenti alla quantità di moto dell'asta $m\dot{s}$ e al momento della quantit di moto dell'asta $ml^2\dot{\theta}/12$.