LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
SECONDA PROVA PARZIALE — 6 Giugno 2016

Esercizio A
Nel piano Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y rivolto verso l'alto si consideri il sistema formato da un anello di massa M e raggio R avente il centro coincidente con l'origine O degli assi e da un'asta QP di massa trascurabile e lunghezza l avente l'estremo Q fisso in un punto dell'anello. Nell'estremo P dell'asta vi e' un punto P di massa m. L'anello puo' ruotare attorno al suo centro e l'asta puo' ruotare attorno al punto Q. Infine, tra il punto Q e il punto Q' di eguale ascissa posto sull'asse x e' tesa una molla di costante elastica h. Si riferisca la posizione dell'anello all'angolo θ tra la direzione negativa dell'asse y e il segmento OQ, valutato positivamente in senso antiorario, e la posizione dell'asta all'angolo φ tra una retta parallela all'asse y e il segmento QP, valutato positivamente in senso antiorario. Si chiede di

a) scrivere l'energia potenziale del sistema, determinare le posizioni di equilibrio e accertare la loro stabilita' al variare dei parametri del sistema

b) scrivere l'energia cinetica del sistema e la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile (a meno della soluzione dell'equazione di secondo grado) nb: $\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi$

EsercizioB
Nel piano Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y diretto verso l'alto si consideri il sistema costituito da un disco di massa M, baricentro G e raggio R che rotola senza strisciare sull'asse x e da un punto materiale P di massa m che scorre in modo liscio sull'asse x. Tra il punto P e il baricentro G e' tesa una molla di costante elastica h. Si riferisca il sistema alle coordinate $s = x_G$ e $x = x_P - x_G$

a) scrivere la lagrangiana del sistema e determinare gli eventuali integrali primi del sistema

b) scrivere le equazioni di Lagrange del sistema e la soluzione del moto a partire dalla quiete e con condizione iniziale $x(0) = x_0 \neq 0$

c) mostrare che l'integrale primo del sistema *non* coincide con la componente P_x della quantita' di moto totale del sistema

d) scrivere la Hamiltoniana del sistema

Parte B. Domande sulla Teoria
Rispondere in modo esauriente alle domande seguenti

1 Integrali primi, equilibri e stabilita' dell'equazione di Eulero

2 Relazione tra moti spontanei e geodetiche per una particella di massa unitaria vincolata in modo liscio ad una superficie bidimensionale

Dimostrare **due** dei teoremi seguenti

3 Teorema di Poinsot

4 Principio variazionale di Hamilton-Helmholtz

5 Teorema di Noether

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato*
- *Consegnare solo la bella copia*

SOLUZIONI

Esercizio A L'energia potenziale del sistema (solo forze conservative) vale

$$U = U^g + U^{el} = -mg(R\cos\theta + l\cos\phi) + \frac{h}{2}R^2\cos^2\theta$$

Le configurazioni di equilibrio $P(\phi,\theta)$ annullano il gradiente di U e quindi

$$U_\phi = mgl\sin\phi = 0, \qquad U_\theta = mgR\sin\theta - hR^2\cos\theta\sin\theta = 0.$$

pertanto, posto $\lambda = mg/hr$

$$\sin\phi = 0, \quad \sin\theta = 0, \qquad \cos\theta = \lambda \leq 1$$

gli equilibri $P(\phi,\theta)$ sono

$$P(0,0) \quad P(0,\pi) \quad P(0,\theta_{3,4}) \qquad P(\pi,0) \quad P(\pi,\pi) \quad P(\pi,\theta_{3,4})$$

ove $\theta_{3,4} = \pm\arccos(\lambda)$. Per studiare la stabilita' uso THND e calcolo la matrice hessiana

$$H_U(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} mgl\cos\phi & 0 \\ 0 & U_{\theta\theta}(\theta) \end{pmatrix}, \qquad U_{\theta\theta}(\theta) = hR^2[\lambda\cos\theta + 1 - 2\cos^2\theta]$$

Il minore di ordine uno e due devono essere positivi e quindi devo avere $\phi = 0$ e $U_{\theta\theta}(\theta) > 0$. Essendo

$$U_{\theta\theta}(0) = hR^2[\lambda - 1] > 0 \qquad se \qquad \lambda > 1$$
$$U_{\theta\theta}(\pi) = -hR^2[\lambda + 1] < 0$$
$$U_{\theta\theta}(\theta_{3,4}) = hR^2[\lambda^2 - 1] > 0 \quad \text{ove esistono}$$

gli unici equilibri stabili sono : $\phi = 0$ e $\theta = \pi/2$ se $\lambda > 1$ e $\phi = 0$ e $\theta = \theta_{3,4}$ se $\lambda < 1$.

L'energia cinetica e' la somma dell'energia cinetica dell'anello $T_A = MR^2\dot\theta^2/2$ e del punto. Scrivendo le coordinate del punto, derivando e quadrando si ottiene

$$T_P = \frac{m}{2}[R^2\dot\theta^2 + l^2\dot\phi^2 + 2Rl\cos(\theta-\phi)\dot\phi\dot\theta]$$

La matrice dell'energia cinetica e'

$$A = \begin{pmatrix} ml^2\cos\phi & mRl\cos(\theta-\phi) \\ mRl\cos(\theta-\phi) & (M+m)R^2 \end{pmatrix}$$

Le frequenze di piccola oscillazione sono le soluzioni di

$$\det(H_U - \omega^2 A) = 0$$

ove le matrici sono valutate in una posizione di equilibrio stabile.

Esercizio B L'unica forza agente e' la forza elastica

$$U^{el} = \frac{h}{2}(R^2 + x^2) = \frac{h}{2}x^2 + cost.$$

L'energia cinetica, tenendo conto della condizione di puro rotolamento, si scrive

$$T = T_D + T_P = \frac{1}{2}\frac{3}{2}M\dot s^2 + \frac{m}{2}(dots^2 + \dot x^2 + 2\dot s\dot x)$$

La lagrangiana e' quindi indipendente dalla coordinata s. L'integrale primo e'

$$\frac{\partial L}{\partial \dot s} = (\frac{3}{2}M + m)\dot s + m\dot x = c$$

da cui, per inversione, ricavo $\dot{s}$ in funzione di $\dot{x}$ e c. Infine, il Routhiano e'

$$R^c(x, \dot{x}) = L(x, \dot{x}, \hat{\dot{s}}) - \hat{c}\dot{x}$$

Conviene calcolare direttamente le equazioni di Lagrange e sostituire l'integrale primo. Le equazioni di Lagrange si scrivono

$$\begin{cases} (\frac{3}{2}M + m)\dot{s} + m\dot{x} &= c \\ m\ddot{x} + m\ddot{s} &= -hx \end{cases}$$

da cui l'equazione per la coordinata non ciclica si scrive

$$m(1 - \frac{2m}{3M + 2m})\ddot{x} = -hx$$

che rappresenta l'equazione di un oscillatore armonico.

La componente x della quantita' di moto vale

$$P_x = M\dot{s} + m(\dot{x} + \dot{s})$$

che non coincide con l'integrale primo perche' s non e' una coordinata di traslazione, ma di rotazione. Da un altro punto di vista, la reazione vincolare che realizza il vincolo di puro rotolamento non e' solo verticale.

L'Hamiltoniana del sistema si scrive

$$H = \frac{1}{2}A^{-1}p \cdot p + U$$