**LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA**
**Esame di MECCANICA ANALITICA**
**SECONDO APPELLO — 12 luglio 2012**

**Parte A. Esercizi**
Nel piano $Oxy$ con $y$ verticale ascendente di un riferimento inerziale $Oxyz$ si consideri il sistema costituito da due aste $OA$ e $AB$ di eguale lunghezza e massa trascurabile. L'estremo $O$ di $OA$ è vincolato nell'origine, le due aste hanno l'estremo $A$ in comune e l'estremo $B$ di $AB$ è vincolato a scorrere in modo liscio lungo l'asse $x$. Nell'estremo $A$ vi è un punto materiale di massa $m$. Infine, tra i punti $O$ e $B$ è tesa una molla di costante elastica $h > 0$. Si prenda come coordinata lagrangiana l'angolo $\theta$ tra la direzione positiva dell'asse delle $x$ e il segmento $OA$, valutato positivamente in senso antiorario.

Rispondere alle domande seguenti

a) scrivere l'energia potenziale del sistema e determinarne gli equilibri

b) indagare la stabilità con i teoremi visti nel corso al variare del parametro $\lambda = mg/4hl$

c) scrivere l'energia cinetica del sistema e la frequenza di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile

d) scrivere la lagrangiana $L = T - U$ del sistema, le equazioni di Lagrange e linearizzarle attorno ad un equilibrio $\theta^{eq}$. Indagare la stabilità con il metodo spettrale

e) studiare il moto del sistema con il metodo di Hamilton-Jacobi a meno di quadrature.

f) dire come cambia l'energia potenziale se invece del punto materiale in $A$ l'asta $OA$ ha massa $m$ e il sistema ruota con velocità angolare $\omega$ attorno all'asse $y$

**Parte B. Domande sulla Teoria**
Rispondere in modo esauriente alle domande seguenti

1 Accertare se l'energia totale $E = T + U$ è funzione di Lyapunov per la stabilità di uno degli equilibri del problema dell'esercizio $A$.

Enunciare e dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

3 Teorema di Poinsot

4 Principio di Hamilton-Helmholtz

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)*
- *Consegnare solo la bella copia*

**SOLUZIONI**

**Parte A. Esercizi**

a) L'energia potenziale associata è

$$U(\theta) = U^g + U^{el} = mgl\sin\theta + \frac{h}{2}(2l\cos\theta)^2.$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti ove $U'(\theta) = 0$ ovvero

$$U'(\theta) = l\cos\theta[mg - 4hl\sin\theta] = 0$$

che ha soluzioni

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad \theta_{3,4} = \arcsin(\lambda) \quad \lambda = \frac{mg}{4hl} \leq 1.$$

b) stabilità. Con forze tutte conservative, uso THND e quindi studio $U''(\theta)$

$$U''(\theta) = -mgl\sin\theta - 4hl^2(1 - 2\sin^2\theta).$$

Si ha quindi

$$U''(\theta_1) = 4hl(1-\lambda)$$

pertanto $\theta_1$ è stabile se $\lambda < 1$, instabile se $\lambda > 1$ e nulla si puo' dire se $\lambda = 1$. Inoltre

$$U'(\theta_2) = 4hl(1+\lambda)$$

quindi $\theta_2$ è sempre stabile. Infine

$$U'(\theta_{3,4}) = 4hl^2(\lambda^2 - 1)$$

quindi gli equilibri $\theta_{3,4}$ ove esistono sono instabili.

c) L'energia cinetica è immediata

$$T = \frac{m}{2}v_A^2 = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2$$

La lagrangiana linearizzata attorno all'equilibrio sempre stabile $\theta_2$ è, scrivendo per semplicità $\theta = \theta - \theta_2$

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}U''(\theta_2)\theta^2$$

La frequenza di piccola oscillazione è la soluzione di

$$\det(H_U(\theta_2) - \omega^2 A) = U''(\theta_2) - \omega^2 ml^2 = 0,$$

quindi

$$\omega^2 = \frac{U''}{A}(\theta_2) = \frac{4hl(1+\lambda)}{ml^2}.$$

d) La lagrangiana del sistema è

$$L = T - U = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - mgl\sin\theta + \frac{h}{2}(2l\cos\theta)^2$$

e l'equazione di Lagrange associata è

$$ml^2\ddot{\theta} = -U'(\theta)$$

Dobbiamo ridurre il sistema al primo ordine

$$\begin{cases} \dot\theta &= v \\ \dot v &= -\frac{U''(\theta)}{ml^2} \end{cases}$$

e linearizzarlo nell'equilibrio $\theta_2$. Scrivendo come prima $\theta = \theta - \theta_2$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} \dot\theta \\ \dot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{U''(\theta_2)}{ml^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice del sistema lineare usando la formula

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A)}{2} \pm \frac{\sqrt{tr(A)^2 - 4\det A}}{2}.$$

Si ha quindi

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\det A} = \pm\sqrt{-\frac{U''(\theta_2)}{ml^2}}$$

L'equilibrio è quindi ellittico e nulla si può dire per la stabilità del sistema nonlineare con il metodo spettrale. Si noti che gli autovalori coincidono con le frequanze delle piccole oscillazioni, perchè? Se invece linearizziamo attorno ad un equlilibrio instabile , per esempio $\theta_1$ con $U''(\theta_1) < 0$ per $\lambda > 1$, l'equilibrio è iperbolico e avendo un autovalore positivo.

e) il sistema è uno-dimensionale e conservativo. Rientra quindi nei casi trattati nel corso, vedi teoria.

f) Se ora il sistema $Oxyz$ ruota attorno all'asse verticale $y$ bisogna aggiungere l'energia potenziale centrifuga della sbarra $OA$ (T. di Steiner)

$$U^{cf}(\theta) = -\frac{m\omega^2}{2}(\frac{ml^2}{12}\cos^2\theta + m(\frac{l}{2}\cos\theta)^2)$$

Si noti che anche l'energia potenziale gravitazionale si modifica

$$U^g = mgy_G = mg\frac{l}{2}.$$

## Parte B. Teoria

1. L'energia totale $E = T + U$ ha un minimo stretto in $(\theta_{eq}, 0)$ se $\theta_{eq}$ è minimo locale stretto di $U$, quindi se $\theta_{eq}$ è stabile. Inolte, essendo tutte le forze conservative, l'energia totale è integrale primo. Si ha quindi $\mathcal{L}_X(W) = 0$ per $W = E$ e quindi l'energia totale è funzione di Lyapunov per la stabilità semplice degli equilibri.