LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
QUARTO APPELLO — 19 settembre 2012

Parte A. Esercizi

Nel piano Oxy con y verticale ascendente di un riferimento inerziale $Oxyz$ si consideri il sistema costituito da un'asta omogenea AC di massa m e lunghezza l e da un disco omogeneo di massa M e raggio R che rotola senza strisciare lungo l'asse x. L'estremo A dell'asta è vincolato in modo liscio a scorrere lungo l'asse y mentre l'estremo C coincide con il baricentro del disco. Inoltre, una molla di costante elastica $h > 0$ è tesa tra l'origine O e il centro C del disco. Si prenda come coordinata lagrangiana l'angolo θ tra la direzione positiva dell'asse delle x e il segmento AC, valutato positivamente in senso orario.

Rispondere alle domande seguenti

a) scrivere l'energia potenziale del sistema e determinarne gli equilibri

b) indagare la stabilità con i teoremi visti nel corso al variare del parametro $\lambda = mg/2hl$

c) scrivere l'energia cinetica del sistema e la frequenza di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile

d) riconoscere che la lagrangiana $L = T - U$ del sistema ha la forma

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} A(\theta) \dot{\theta}^2 - U(\theta). \tag{1}$$

Scrivere le equazioni di Lagrange e linearizzarle attorno ad un equilibrio θ^* che abbia $U''(\theta^*) < 0$. Indagare la stabilità con il metodo spettrale

e) studiare il moto del sistema (1) con il metodo di Hamilton-Jacobi a meno di quadrature.

Parte B. Domande sulla Teoria

Enunciare e dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

3 Teorema di Lyapunov

4 definizione di trasformazione canonica e condizione sufficiente di canonicità per trasformazioni *indipendenti* dal tempo.

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)*
- *Consegnare solo la bella copia*

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

a) L'energia potenziale associata è

$$U(\theta) = U^g + U^{el} = mg\frac{l}{2}\sin\theta + \frac{h}{2}(l\cos\theta)^2.$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti ove $U'(\theta) = 0$ ovvero

$$U'(\theta) = l\cos\theta[mg - 2hl\sin\theta] = 0$$

che ha soluzioni

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad \theta_{3,4} = \arcsin(\lambda) \quad \lambda = \frac{mg}{2hl} \leq 1.$$

b) stabilità. Con forze tutte conservative, uso THND e quindi studio $U''(\theta)$

$$U''(\theta) = -mg\frac{l}{2}\sin\theta - hl^2(1 - 2\sin^2\theta).$$

Si ha quindi

$$U''(\theta_1) = hl^2(1 - \lambda)$$

pertanto θ_1 è stabile se $\lambda < 1$, instabile se $\lambda > 1$ e nulla si puo' dire se $\lambda = 1$. Inoltre

$$U'(\theta_2) = hl^2(1 + \lambda)$$

quindi θ_2 è sempre stabile. Infine

$$U'(\theta_{3,4}) = hl^2(\lambda^2 - 1)$$

quindi gli equilibri $\theta_{3,4}$ ove esistono sono instabili.

c) L'energia cinetica è

$$T = T^a + T^d = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot\theta^2 + \frac{M}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\omega^2$$

Per il calcolo della velocità del baricentro dell'asta abbiamo

$$x_G = \frac{l}{2}\cos\theta, \quad y_G = R + \frac{l}{2}\sin\theta, \quad v_G^2 = \dot x_G^2 + \dot y_G^2 = \frac{l^2}{2}\dot\theta^2;$$

per il disco abbiamo $x_G = l\cos\theta$ e $v_G^2 = \dot x_G^2$ e infine, per la condizione di puro rotolamento

$$\omega = \frac{\dot x_G}{R}, \qquad \omega^2 = \frac{l^2\sin^2\theta}{R^2}.$$

Pertanto

$$T = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}Ml^2\sin^2\theta\dot\theta^2 = \frac{1}{2}A(\theta)\dot\theta^2$$

La lagrangiana linearizzata attorno all'equilibrio sempre stabile θ_2 è, scrivendo per semplicità $\theta = \theta - \theta_2$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A(\theta_2)\dot\theta^2 - \frac{1}{2}U''(\theta_2)\theta^2$$

La frequenza di piccola oscillazione è la soluzione di

$$\det(H_U(\theta_2) - \omega^2 A) = U''(\theta_2) - \omega^2 A(\theta_2) = 0,$$

quindi
$$\omega^2 = \frac{U''}{A}(\theta_2) = \frac{hl^2(1+\lambda)}{\frac{ml^2}{3} + \frac{3Ml^2}{2}}.$$
d) il procedimento è analogo a quanto fatto nel corso per la linearizzazione delle equazioni di Lagrange nel capitolo sulle piccole oscillazioni. Le equazioni linearizzate sono le equazioni di Lagrange di
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A(\theta_2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}U''(\theta_2)\theta^2.$$

e) il sistema è uno-dimensionale e conservativo. Rientra quindi nei casi trattati nel corso, vedi teoria.

Parte B. Teoria

Consultare gli appunti del corso.