LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
PRIMO APPELLO — 21 Giugno 2012

Parte A. Esercizi

1. Un punto materiale di massa m si muove lungo l'asse orizzontale x di un riferimento inerziale $Oxyz$ secondo l'equazione

$$m\ddot{x} = f(x) = \tan x, \qquad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

a) Scrivere la traiettoria del moto per fissate condizioni iniziali a meno del calcolo di primitive di integrali e inversione di funzioni.
b) Tracciare il ritratto in fase del sistema, determinare gli equilibri del sistema nel piano delle fasi e indagare la loro stabilità con i metodi e teoremi visti nel corso.
c) Come cambiano gli equilibri e la stabilità degli stessi se ora il sistema $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale y?
d) indagare equilibri e stabilità di $x = 0$ nel caso in cui oltre alla forza f agisca solamente una molla di costante elastica $h > 0$ tra il punto e l'origine O.

2. Nel piano verticale Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y diretto verso l'alto si consideri il sistema soggetto a gravità costituito da un'asta AB di massa m e lunghezza l. Tra l'estremo B e il punto B' di eguale ascissa è tesa una molla di costante elastica $h > 0$. Si supponga che $mg > 2hl$. Si riferisca il sistema alla coordinata θ, angolo tra il segmento AB e la direzione positiva dell'asse x, valutato positivamente in senso antiorario.
e) Nel caso in cui l'estremo A sia vincolato nell'origine O scrivere l'energia potenziale delle forze conservative agenti nel riferimento $Oxyz$ e l'energia cinetica dell'asta. Si scriva la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a una posizione di equilibrio stabile.
f) Sia ora l'estremo A libero di scorrere sull'asse x. Si introduca l'ulteriore coordinata $x = x_A$. Scrivere l'energia cinetica del sistema e la sua Lagrangiana. Determinare gli integrali primi del sistema. Spiegare, senza fare tutti i conti, come si studia il moto del sistema con il metodo di Hamilton-Jacobi

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente alle domande seguenti

1 instabilità delle rotazioni attorno all'asse intermedio di inerzia nel moto del corpo rigido non soggetto a momenti

2 Definizione di Hamiltonana ed equivalenza tra equazioni di Lagrange e di Hamilton

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

3 Teorema di Poinsot

4 Enunciato e dimostrazione del Principio di Hamilton-Helmholtz

---

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)*
- *Consegnare solo la bella copia*

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

1. L'energia potenziale associata è

$$U(x) = -\int f(\xi)d\xi = -\int \tan(\xi)d\xi = \log(\cos x)$$

La traiettoria del moto si ricava dalla formula

$$t = F(x) + c = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(e - U(x))}} + c.$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti ove $U'(x) = -f(x) = 0$ e sono $x = 0$. Dallo studio di U si vede che 0 è un massimo. Lo studio delle curve di livello mostra che $x = 0, v = 0$ è un equilibrio instabile. Verifichiamo con i teoremi visti nel corso. Scriviamo il sistema al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= = m^{-1}f(x) = m^{-1}(\tan x) \end{cases}$$

e linearizziamolo negli equilibri:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{m\cos^2 x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice $A = A(x)$ per $x = 0$ usando la formula

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A)}{2} \pm \frac{\sqrt{tr(A)^2 - 4\det A}}{2}.$$

Si vede che per $x = 0$ $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{m^{-1}}$ quindi l'equilibrio, iperbolico, è instabile per il sistema nonlineare avendo un autovalore con parte reale positiva.

Se ora il sistema $Oxyz$ ruota attorno all'asse verticale y bisogna aggiungere l'energia potenziale centrifuga

$$U^{cf}(x) = -\frac{m\omega^2}{2}x^2.$$

Si vede subito che l'unico equilibrio è $x = 0$ che è un massimo locale e quindi instabile con conti analoghi ai precedenti. Se invece agisce una molla lineare bisogna aggiungere l'energia potenziale elastica

$$U^{el} = \frac{h}{2}x^2$$

che ha un minimo in $x = 0$ che "compete" con il massimo di U^f. Gli equilibri sono le soluzioni di $-U'(x) = 0$ e sono dati da

$$\tan x - hx = 0.$$

Dal grafico (studio di $f'(0)$) si ha una unica soluzione $x = 0$ se $h \leq 1$ e tre soluzioni, $x = 0$ e due simmetriche rispetto a $x = 0$ se $h > 1$. Indaghiamo la stabilità di $x = 0$ come richiesto. Il sistema linearizzato nell'equilibrio è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1-h}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

con autovalori per $x = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{(1-h)}{m}}$$

Si vede quindi che l'equilibrio è ancora iperbolico e instabile se $h < 1$ mentre è ellittico e quindi il metodo spettrale non dice nulla se $h \geq 1$. Usiamo in questo caso il THND avendo sole forze conservative. Si ha

$$H_U(0) = U''(0) = h - 1$$

e quindi l'equilibrio è stabile se $h > 1$. Il caso $h = 1$ puo' essere accertato solo con lo studio delle derivate successive del potenziale.

2. Le forze conservative agenti nel sistema inerziale sono la forza elastica e gravitazionale. Si ha

$$U(x) = U^{el}(x) + U^g(x) = \frac{h}{2} l^2 \sin^2\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta.$$

Gli equilibri sono le soluzioni di

$$U'(\theta) = l\cos\theta(hl\sin\theta - \frac{mg}{2}) = 0$$

Per la condizione richiesta $mg > 2hl$ l'unico equilibrio si ha per $\cos\theta = 0$ e quindi $\theta = \pm\pi/2$. L'energia cinetica si trova usando la formula per il corpo rigido con un punto fisso e vale

$$T = \frac{1}{2} I_A \dot\theta^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}$$

Il sistema linearizzato è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A\dot u^2 - \frac{1}{2} U''(eq)u^2$$

e quindi la frequenza di piccola oscillazione è

$$\omega^2 = \frac{A}{U''(eq)}.$$

Sia ora l'estremo A libero di muoversi sull'asse x. Vale

$$x_G = x + \frac{l}{2}\cos\theta, \qquad y_G = -\frac{l}{2}\sin\theta.$$

L'energia cinetica si trova ora usando il T. di Konig. Allora

$$T = \frac{m}{2} v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot\theta^2 = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \frac{l^2}{4}\dot\theta^2 - l\sin\theta\dot x\dot\theta) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot\theta^2.$$

La lagrangiana $L = T - U^{el}(\theta)$ non dipende dalla coordinata x che è ciclica. Si ha quindi, oltre all'integrale dell'energia $E = T + U$, l'ulteriore integrale primo $\partial L/\partial \dot x$. Il sistema rientra in uno dei casi trattati del corso per l'applicazione del metodo di HJ.