LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
PRIMA PROVA PARZIALE — 4 Aprile 2012

Parte A. Esercizi

1. Un punto materiale di massa m si muove lungo l'asse x di un riferimento inerziale secondo l'equazione

$$m\ddot{x} = f(x) = -x + x^2$$

a) Scrivere la traiettoria del moto per fissate condizioni iniziali a meno del calcolo di primitive di integrali e inversione di funzioni.

b) Tracciare il ritratto in fase del sistema, determinare gli equilibri del sistema nel piano delle fasi e indagare la loro stabilità con i metodi visti nel corso (Teorema di Lyapunov, Teorema spettrale). Come cambiano gli equilibri e la stabilità degli stessi se si aggiunge una forza viscosa $-k\dot{x}$, $k > 0$?

2. Nel piano Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y diretto verso l'alto giace un disco di massa m e raggio R. Il disco rotola senza strisciare sull'asse x del riferimento. Tra il baricentro G del disco e il punto $(0, R)$ sull'asse y è tesa una molla di costante elastica h. Infine, il riferimento $Oxyz$ ruota rispetto ad uno spazio inerziale con velocità angolare costante ω diretta come l'asse y. Si usi l'ascissa $x = x_G$ del baricentro per descrivere la posizione del disco nel riferimento *non inerziale* $Oxyz$.
b) Scrivere l'energia potenziale delle forze conservative agenti nel riferimento $Oxyz$ e l'energia cinetica del disco.
c) Scrivere la velocità del punto D opposto al punto di contatto C rispetto al baricentro.

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente alle domande seguenti

1 Definizione di equilibrio per un sistema di e.d.o. $\dot{x} = X(x)$ e per un sistema meccanico $m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$. Nel primo caso dare anche la definizione di equilibrio stabile e asintoticamente stabile.

2 Enunciato del teorema di Lyapunov

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

3 Mostrare che se il moto di un sistema è rigido rispetto una terna (osservatore), è rigido rispetto ad ogni altra terna

4 Enunciato e dimostrazione del Principio di D'Alembert.

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)*
- *Consegnare solo la bella copia*

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

1. L'energia potenziale associata è

$$U(x) = -\int f(\xi)d\xi = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

La traiettoria del moto si ricava dalla formula

$$t = F(x) + c = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(e - U(x))}} + c.$$

Le configurazioni di equilibrio sonoi punti ove $U'(x) = -f(x) = 0$ e sono $x = 0$ e $x = 1$. Dallo studio di U si vede che 0 è un minimo e 1 un massimo. Lo studio delle curve di livello mostra che $x = 0, v = 0$ è un equilibrio stabile e $x = 1, v = 0$ è instabile. Verifichiamo con i teoremi visti nel corso. Scriviamo il sistema al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= = m^{-1}f(x) = m^{-1}(-x + x^2) \end{cases}$$

e linearizziamolo negli equilibri:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1+2x}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_{eq} \\ v \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice $A = A(x)$ per $x = 0$ e $x = 1$ usando la formula

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A)}{2} \pm \frac{\sqrt{tr(A)^2 - 4\det A}}{2}.$$

Si vede che per $x = 0$ $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{m^{-1}}$ quindi l'equilibrio è ellittico e il metodo spettrale non da informazioni sul sistema nonlineare; in $x = 1$ si ha $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{m^{-1}}$ e quindi l'equilibrio, iperbolico, è instabile per il sistema nonlineare avendo un autovalore con parte reale positiva. La stabilità di $x = 0$ si può accertare con il primo metodo di Lyapunov usando l'energia totale $E = T + U$ che è un integrale primo, come funzione di Lyapunov. Se si aggiunge una forza viscosa, gli equilibri non sono modificati, dato che essa è nulla per velocità nulla. Il sistema linearizzato diviene

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1+2x}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_{eq} \\ v \end{pmatrix}.$$

con autovalori per $x = 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{(\frac{k}{m})^2 - 4m^{-1}}$$

e per $x = 1$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{(\frac{k}{m})^2 + 4m^{-1}}$$

Si vede quindo che ora entrambi gli equilibri sono iperbolici, $x = 0$ è asintoticamente stabile e $x = 1$ rimane instabile avendo un autovalore con parte reale positiva.

2. Le forze conservative agenti nel sistema non inerziale sono la forza elastica e quella centrifuga. Si ha, usando il teorema Steiner

$$U(x) = U^{el}(x) + U^{cf}(x) = \frac{h}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}I_O^y = \frac{h}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}(I_G^y + mx^2)$$

e quindi

$$U(x) = (\frac{h}{2} - \frac{m\omega^2}{2})x^2 + cost.$$

L'energia cinetica si trova usando il T. di Konig e ricordando che per la condizione di puro rotolamento $\dot{x} = R\dot{\theta}$. Allora

$$T = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}I_G^z\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}m\dot{x}^2$$

la velocità del punto D si trova usando la FFMR:

$$v_D = v_C + \omega \wedge CD = \dot{\theta}\hat{z} \wedge 2R\hat{y} = 2R\frac{\dot{x}}{R}\hat{x} = 2\dot{x}\hat{x}.$$