
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
SECONDO APPELLO — 10 Luglio 2014

Parte A. Esercizi

A1. Nel piano verticale Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y verticale ascendente giace una guida rettilinea liscia passante per l'origine O e formante con la direzione positiva dell'asse x un angolo di $\pi/4$. Una lamina quadrata di lato l e massa m è vincolata a muoversi nel piano verticale Oxy con il baricentro G che scorre lungo la guida rettilinea. Si riferisca la lamina alle coordinate (s, θ) rispettivamente ascissa del baricentro e angolo tra il segmento OG e il segmento GA , valutato positivamente in senso orario. Inoltre, tra il vertice A della lamina e l'origine O è tesa una molla di costante elastica $h > 0$.

- a) Scrivere l'energia cinetica e potenziale del sistema e la Lagrangiana $L = T - U$. Per semplicità si ponga $a = l\sqrt{2}/2$.
- b) studiare gli equilibri del sistema, la loro stabilità e determinare le frequenze di piccola oscillazione attorno ad una posizione di equilibrio stabile
- c) Si supponga ora che sul baricentro agisca una forza di attrito viscosa $F = -kv_G$. Si scrivano le equazioni di Lagrange del moto del sistema
- d) (facoltativo) si imposti lo studio del sistema nel caso in cui il sistema di riferimento $Oxyz$ ruoti attorno all'asse y con velocità angolare costante ω rispetto ad un riferimento inerziale.

A2. a) Si scriva l'Hamiltoniana associata alla Lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}a(q_1)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}b(q_2)\dot{q}_2^2 - U(q_1) - V(q_2)$$

e si studi l'equazione del moto con il metodo di Hamilton-Jacobi.

b) Scrivere l'Hamiltoniana associata alla Lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}a(q_1)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}b(q_2)\dot{q}_2^2 - U(q_1) - V(q_2) - c(q_1)\dot{q}_1$$

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente a due delle domande seguenti

- 1 Moto sotto forze centrali
- 2 Dinamica in un riferimento non inerziale. Deduzione delle forze fittizie
- 3 Metodo di Routh

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

- 3 Teorema di Liapunov sulla stabilità degli equilibri
- 4 Principio variazionale di Hamilton

-
- Scrivere nome e cognome **in stampatello** su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)
 - Consegnare solo la bella copia
-

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

A.1 L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2, \quad I = \frac{m}{12}(l^2 + l'^2)$$

L'energia potenziale è la somma dell'energia gravitazionale ed elastica. Avendo posto $a = l\sqrt{2}/2$ si ha (teorema di Carnot)

$$U(\theta, s) = mg\frac{a}{l}s + \frac{h}{2}(s^2 + a^2 - 2as\cos\theta)$$

Gli equilibri sono i punti ove si annulla il gradiente dell'energia potenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \theta} = has\sin\theta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial s} = mg\frac{a}{l} + hs - ha\cos\theta = 0 \end{cases}$$

e quindi, scrivendo $P = P(\theta, s)$

$$P_1 = (\arccos(\frac{mg}{hl}), 0)$$

$$P_2 = (0, a(1 - \frac{mg}{hl}))$$

$$P_3 = (\pi, -a(1 + \frac{mg}{hl}))$$

Per la stabilità, avendo sole forze conservative, possiamo usare il THND, che dà condizioni necessarie e sufficienti. La matrice hessiana è

$$H_U(\theta, s) = \begin{pmatrix} has\cos\theta & ha\sin\theta \\ ha\sin\theta & h \end{pmatrix}$$

e quindi

$$H_U(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & ha\sin\theta^* \\ ha\sin\theta^* & h \end{pmatrix}, \quad \sin\theta^* = \pm\sqrt{1 - (\frac{mg}{hl})^2}$$

pertanto P_1 è instabile. Inoltre

$$H_U(P_2) = \begin{pmatrix} has^* & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad s^* = a(1 - \frac{mg}{hl})$$

quindi P_2 è stabile se e solo se $mg < hl$. Infine

$$H_U(P_3) = \begin{pmatrix} -has^* & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, \quad s^* = -a(1 + \frac{mg}{hl})$$

che è sempre stabile. La frequenza delle piccole oscillazioni attorno a P_3 si trova dalla formula

$$\det(H_U(P_3) - \omega^2 A(P_3)) = 0$$

ovvero

$$\det \begin{pmatrix} ha^2(1 + \frac{mg}{hl}) - \omega^2 I & 0 \\ 0 & h - \omega^2 m \end{pmatrix} = 0$$

Se ora aggiungiamo una forza viscosa $F = -kv_G = -k\dot{s}$, le sue componenti lagrangiane della sollecitazione sono $Q_\theta = 0$, $Q_s = -k\dot{s}$. Le equazioni di Lagrange sono allora

$$\begin{cases} I\ddot{\theta} &= -\frac{\partial U}{\partial \theta} \\ m\ddot{s} &= -\frac{\partial U}{\partial s} - k\dot{s} \end{cases}$$

Facoltativo. Se il sistema di riferimento ruota con velocità angolare costante attorno all'asse verticale y , dobbiamo considerare le forze fittizie. Detta v la velocità di un punto della lamina, e w una velocità permessa dai vincoli, siccome i vettori v , w e ω sono complanari, le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono nulle. Quelle invece della forza centrifuga ammettono potenziale dato da

$$U^{cf}(\theta, s) = -\frac{\omega^2}{2} I_y^O, \quad I_y^O = ms \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + I_y^G(\theta)$$

Alle equazioni di Lagrange precedenti si aggiungono i termini $\partial U^{cf}/\partial s$ e $\partial U^{cf}/\partial \theta$.

A.2 a) L'Hamiltoniana associata è separabile e quindi rientra in uno dei casi visti nel corso.

b) Per calcolare l'hamiltoniana dobbiamo usare la formula

$$H(q, p) = \sum_h p_h \hat{q}_h - L(q, \hat{q})$$

ove $p_h = \partial L / \partial \dot{q}_h$ e quindi

$$p_1 = a\dot{q}_1 - c, \quad \hat{q}_1 = \frac{1}{a}(p_1 + c)$$

$$p_2 = b\dot{q}_2, \quad \hat{q}_2 = \frac{p_2}{b}$$

Svolgendo i conti si trova

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{a} + \frac{1}{2} \frac{p_2^2}{b} + p_1 \frac{c}{a} + U + V + cost.$$