LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
PRIMO APPELLO — 18 Giugno 2014

Parte A. Esercizi

A1. Nel piano orizzontale Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse z verticale ascendente giace una guida curvilinea liscia chiusa priva di auto-intersezioni passante per l'origine O. L'equazione della guida, riferita a coordinate polari è $r = \rho(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ ove $\rho(\theta)$ è una funzione assegnata. Un punto materiale P di massa m scorre sulla guida. Il sistema è quindi a un grado di libertà e la sua posizione riferita alla coordinata $q = \theta$ è quindi data da

$$OP(\theta) = \rho(\theta)\mathbf{e}_r$$

Si supponga che tra l'origine O e il punto P è tesa una molla di costante elastica $h > 0$.

a) Scrivere l'energia cinetica e potenziale del sistema e la Lagrangiana $L = T - U$. Per semplicità si ponga
$$a(\theta) = [(\frac{d\rho}{d\theta})^2 + \rho^2(\theta)].$$

b) Scrivere l'equazione di Lagrange del moto e la sua soluzione, a meno di quadrature, sfruttando l'integrale primo dell'energia. Quali sono gli equilibri e come si può discuterne la stabilità ?

c) Si supponga ora che il sistema $Oxyz$ scorra lungo l'asse x rispetto ad un sistema inerziale O^*xyz. Si introduca l'ulteriore coordinata s con $O^*O = s\hat{x}$. Ora il sistema è a due gradi di libertà (s, θ). Si scriva la lagrangiana del sistema $L = T - U$ nel riferimento inerziale O^*xyz. In particolare si calcoli la matrice 2-dimensionale dell'energia cinetica.

d) Nell'ipotesi che la funzione ρ sia $\rho(\theta) = e^{\int \tan\theta d\theta}$, calcolare la matrice dell'energia cinetica e la Hamiltoniana associata. Scrivere la soluzione delle equazioni del moto a meno di quadrature con il metodo di Hamilton-Jacobi.

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente a due delle domande seguenti

1 Moto sotto forze centrali

2 Trasformazioni canoniche e loro caratterizzazione

3 Metodo di Routh

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

3 Teorema di Liapunov sulla stabilità degli equilibri

4 Instabilità delle rotazioni attorno all'asse di momento d'inerzia intermedio in un corpo rigido non soggetto a momenti

---

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)*
- *Consegnare solo la bella copia*

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

A1. L'energia potenziale elastica è

$$U(\theta) = \frac{h}{2} OP^2 = \frac{h}{2}\rho(\theta)^2$$

L'energia cinetica è

$$T(\theta, \dot\theta) = \frac{m}{2} v_P^2 = \frac{m}{2}[\dot\rho^2 + \rho(\theta)^2]\dot\theta^2 = \frac{m}{2}[\rho'^2 + \rho^2]\dot\theta^2 = \frac{m}{2}a(\theta)\dot\theta^2$$

e la lagrangiana è $L = T - U$. L'equazione del moto si ottiene scrivendo l'equazione di Lagrange associata alla Lagrangiana data. Per evitare di risolvere l'equazione del secondo ordine possiamo usare l'integrale primo dell'energia

$$e = T + U = \frac{1}{2} m a(\theta)\dot\theta^2 + U(\theta)$$

che porge

$$\dot\theta = \pm\sqrt{\frac{2}{ma(\theta)}(e - U(\theta))}$$

Essendo $a(\theta) > 0$ sempre, l'integrazione si fa con il metodo dei sistemi 1-dimensionali conservativi, per separazione di variabili.

Per quanto riguarda gli equilibri, essi sono le coppie $(\theta, 0)$ nel piano delle fasi per le quali si ha $U'(\theta) = 0$ ovvero

$$\rho(\theta)\rho'(\theta) = 0$$

e quindi sono l'origine e le configurazioni ove $\rho' = 0$. Per studiarne la stabilità possiamo usare TLD e THND avendo solo forze conservative. Condizione necessaria e sufficente per la stabilità è $U''(\theta) > 0$ ovvero

$$(\rho')^2 + \rho\rho'' > 0.$$

Se ora supponiamo che il sistema $Oxyz$ trasli rispetto al sistema O^*xyz con velocità $V = \dot s\hat x$, l'energia cinetica del punto P nel sistema inerziale è

$$(v^a)^2 = (v + V)^2 = v^2 + V^2 + 2V \cdot v = v^2 + \dot s^2 + 2\dot s v_x = a(\theta)\dot\theta^2 + \dot s^2 + 2\dot s \frac{d}{dt}(\rho\cos\theta).$$

Svolgendo i calcoli e ponendo $b(\theta) = (\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)$ si ha

$$(v^a)^2 = a(\theta)\dot\theta^2 + \dot s^2 + 2(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)\dot\theta\dot s = a\dot\theta^2 + 2b\dot\theta\dot s + \dot s^2$$

per cui la matrice dell'energia cinetica è

$$A(\theta) = m\begin{pmatrix} a(\theta) & b(\theta) \\ b(\theta) & 1 \end{pmatrix}$$

Infine, nel caso in cui $\rho(\theta) = e^{\int \tan\theta}$ si ha

$$\frac{\rho'}{\rho} = \tan\theta$$

e quindi $b(\theta) \equiv 0$. La matrice dell'energia cinetica diventa quindi diagonale e si inverte senza difficoltà. La Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{1}{2}A^{-1}(p, p) + U(\theta) = H(\theta, p_\theta, p_s)$$

Quindi il sistema ha coordinate tutte cicliche tranne una e si integra con HJ con i metodi visti nel corso.