LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
TERZO APPELLO — 3 Settembre 2014

Parte A. Esercizi

A1. Nel piano Oxy con y verticale ascendente di un riferimento inerziale $Oxyz$ si consideri il sistema formato da un disco omogeneo di massa M e raggio R che rotola senza strisciare sull'asse x e da un'asta AP di massa trascurabile e lunghezza l vincolata in modo liscio per l'estremo A nel centro del disco. Nell'altro estremo P vi è un punto materiale di massa m. Infine, tra il punto P e il punto $Q = (0, R)$ è tesa una molla di costante elastica $h > 0$. Si riferisca il sistema alle coordinate x, ascissa del baricentro di G del disco e θ, angolo tra direzione negativa dell'asse y e il segmento AP, valutato positivamente in senso antiorario. Rispondere alle domande seguenti

a) scrivere l'energia potenziale del sistema e determinarne gli equilibri

b) indagare la stabilità con i teoremi visti nel corso al variare del parametro $\lambda = mg/hl$

c) Scrivere l'energia cinetica del sistema e la Lagrangiana $L = T - U$.

d) Si supponga ora che la molla non sia presente (mettere $h = 0$). Scrivere l'enunciato del Teorema di Noether e vedere se tale teorema si può applicare al sistema in questione. Calcolare l'eventuale integrale primo.

e) Si supponga ora che il sistema ruoti con velocità angolare costante diretta come l'asse verticale y. Si voglia studiare gli equilibri del sistema *riferimento rotante*. Dire quali forze sono presenti e se è possibile applicare il Teorema dell'Hessiano non degenere per studiare la stabilità degli equilibri.

A.2 Scritta la definizione di parentesi di Poisson $\{f, g\}$ di due funzioni $f = f(q, p)$ e $g = g(q, p)$ dimostrare che vale la proprietà di Leibnitz

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\} \qquad \forall f, g, h.$$

Mostrare che, posto $x = (q, p)$, la funzione $K(x)$ è un integrale primo del moto di Hamiltoniana $H(x)$ se e solo se $\{H, K\} = 0$.

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente a una delle domande seguenti

1 Equivalenza equazioni di Lagrange e Hamilton

2 Trasformazioni canoniche e loro caratterizzazione

3 Integrali primi del moto del corpo rigido in assenza di momenti applicati

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

3 Principio dei Lavori Virtuali

4 Instabilità delle rotazioni attorno all'asse di momento d'inerzia intermedio in un corpo rigido non soggetto a momenti

---

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)*
- *Consegnare solo la bella copia*

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

A1. a) Il sistema è soggetto a sole forze conservative. Si ha facilmente

$$U = U^g + U^{el} = -mg\cos\theta + \frac{h}{2}(x^2 + 2lx\sin\theta).$$

Gli equilibri sono i punti in cui si annulla il gradiente di U

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} &= hx + hl\sin\theta = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= mgl\sin\theta + hl\cos\theta = 0. \end{cases}$$

Sostituendo si ha $x = -l\sin\theta$; il sistema ha soluzioni

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi, \quad \theta_{3,4} = \cos^{-1}(\frac{mg}{hl}) \qquad se\ \lambda = \frac{mg}{hl} \leq 1$$

corrispondentemente si ha

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -l\sqrt{1-\lambda^2}, \quad x_4 = l\sqrt{1-\lambda^2}$$

b) Studiamo la stabilità con il THND. La matrice hessiana è

$$H_U(x,\theta) = \begin{pmatrix} h & hl\cos\theta \\ hl\cos\theta & mgl\cos\theta - hlx\sin\theta \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$H_U(P_1) = \begin{pmatrix} h & hl \\ hl & mgl \end{pmatrix}, \quad H_U(P_2) = \begin{pmatrix} h & -hl \\ -hl & -mgl \end{pmatrix}, \quad H_U(P_{3,4}) = \begin{pmatrix} h & mg \\ mg & hl^2 \end{pmatrix},$$

Si vede quindi che P_1 è stabile se $\lambda > 1$, P_2 è sempre instabile e $P_{3,4}$ sono stabili ove esistono.
c) Energia cinetica. Si ha facilmente $T = T_D + T_P$ ove

$$T_D = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\frac{\dot{x}^2}{R^2}$$

$$T_P = \frac{m}{2}v_P^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\cos\theta\dot{x}\dot{\theta})$$

d) La lagrangiana $L = T(\theta,\dot{x},\dot{\theta}) - U^g(\theta)$ non dipende dalla coordinata x che è ciclica. Si ha quindi, oltre all'integrale dell'energia $E = T + U$, l'ulteriore integrale primo $\partial L/\partial\dot{x}$. Il Teorema di Noether afferma che l'invarianza della Lagrangiana $L(t,q,\dot{q})$ rispetto a cambi di coordinate $Q = Q(q,\lambda)$ tali che $Q(q,0) = q$ determina la conservazione della quantità

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial Q_i}{\partial \lambda}(q,0) \quad \text{valutata in } (t,q,\dot{q})$$

Nel nostro caso l'invarianza rispetto alla traslazione $(x,\theta) \to (x+\lambda,\theta)$ determina la conservazione di $\partial L/\partial\dot{x}$.

A2. Discende subito dalla regola di Leibnitz sulla differenziazione del prodotto. Per la parte successiva, vedi appunti del corso.