**LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA**
**Esame di MECCANICA ANALITICA**
**SECONDA PROVA PARZIALE — 27 Maggio 2014**

**Parte A. Esercizi**

A1. Nel piano *orizzontale* $Oxy$ di un riferimento inerziale $Oxyz$ con l'asse $z$ verticale ascendente, giace un'asta omogenea $AB$ di massa $M$ e lunghezza $l$ vincolata a ruotare nel piano orizzontale attorno al suo punto medio $C$ coincidente con l'origine del riferimento. Un punto materiale $P$ di massa $m$ è vincolato in modo liscio a scorrere lungo l'asta. Si usi come coordinata del punto $P$ l'ascissa $s = OP$ lungo l'asta e come coordinata per l'asta l'angolo $\theta$ tra la direzione positiva dell'asse delle $x$ e l'asta $AB$, valutato positivamente in senso antiorario. Infine, tra l'origine $O$ e il punto $P$ è tesa una molla di costante elastica $h$ e lunghezza a riposo nulla. Per semplicità si indichi con $I = I_O^z$ il momento d'inerzia dell'asta.

a) determinare la lagrangiana $L$ del sistema

b) scrivere la lagrangiana ridotta di Routh, studiare gli equilibri del sistema ridotto, e la loro stabilità al variare del parametro $\lambda = I\sqrt{h/m}$

c) scrivere la frequenza della piccola oscillazione del sistema ridotto attorno ad un equilibrio stabile

d) scrivere l'Hamiltoniana corrispondente alla lagrangiana $L$ e studiare il moto del sistema con il metodo di Hamilton-Jacobi

**Parte B. Domande sulla Teoria**

Rispondere in modo esauriente a DUE delle domande seguenti

1 equilibri e stabilità dell'equazione di Eulero per un corpo rigido non soggetto a momenti

2 Parentesi di Poisson e loro utilizzo nella caratterizzazione delle trasformazioni canoniche

3 Principio variazionale di Hamilton

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

3 Teorema di Noether

4 Teorema di Poinsot

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)*
- *Consegnare solo la bella copia*

## SOLUZIONI

### Parte A. Esercizi

A1. a) La lagrangiana del sistema è $L = T - U$ ove $T = T_P + T_{AB}$ e $U = U^{el} = hs^2/2$. Per l'energia cinetica si ha

$$T_P = \frac{m}{2}v_P^2 = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2), \quad T_{AB} = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2, \quad I = I_O^z = \frac{ml^2}{12}$$

quindi

$$L = L(s, \dot{s}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}(ms^2 + I)\dot{\theta}^2 - \frac{h}{2}s^2.$$

b) La funzione di Routh rispetto alla coordinata ciclica $\theta$ si scrive

$$R^c(s, \dot{s}) = L(s, \dot{s}, \varphi(s, \dot{s}, c)) - c\varphi(s, \dot{s}, c)$$

ove $\dot{\theta} = \varphi(s, \dot{s}, c)$ si ottiene invertendo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (ms^2 + I)\dot{\theta} = c.$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$R^c(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{1}{2}hs^2 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{(ms^2 + I)} = T_P - V(s)$$

Gli equilibri sono gli zeri di $V'(s)$ ovvero le soluzioni di

$$V'(s) = hs - \frac{c^2 ms}{(I + ms^2)^2} = 0$$

e sono $s = 0$ e

$$s^2 = \frac{1}{m}(c\sqrt{\frac{m}{h}} - I), \qquad \text{se } c > I\sqrt{\frac{h}{m}} = \lambda.$$

Dallo studio del grafico dell'energia potenziale efficace $V(s)$ si vede che se $c < \lambda$ l'equilibrio $s = 0$ è stabile (minimo d $V$), mentre se $c > \lambda$, $s = 0$ è massimo locale di $V$ e i due nuovi equilibri sono stabili (biforcazione di Hopf).

c) per un sistema unidimensionale, la lagrangiana linearizzata attorno a $s = 0$ è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A(0)\dot{s}^2 - \frac{1}{2}V''(0)s^2$$

e quindi la frequenza di piccola oscillazione è

$$\omega^2 = \frac{V''(0)}{A(0)} = \frac{h - \frac{c^2 m}{I^2}}{m}$$

d) l'hamiltoniana corrispondente alla lagrangiana $L = T - U$ si scrive facilmente come

$$H = \frac{1}{2}A^{-1}(p, p) + U(s)$$

ovvero

$$H(s, p_s, p_\theta) = \frac{1}{2}[\frac{p_s^2}{m} + \frac{p_\theta^2}{I + ms^2}] + \frac{h}{2}s^2$$

che è del tipo "tutte cicliche tranne una". L'applicazione del metodo di HJ è standard (vedi appunti del corso).