
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
PRIMO APPELLO — 16 Giugno 2015

Parte A. Esercizi

A1. Nel piano verticale Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y verticale ascendente si consideri il sistema soggetto a gravità costituito da due aste OP e PA di lunghezza l e massa *nulla* aventi il punto P in comune, il punto A vincolato in modo liscio a scorrere sull'asse x e il punto O vincolato nell'origine. Si riferisca la posizione delle due aste all'angolo θ tra la direzione positiva dell'asse x e l'asta OP , valutato positivamente in senso antiorario. Tra i punti O e A è tesa una molla lineare di costante elastica $h > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Infine, nel punto P è posto un punto materiale di massa m .

- a) Scrivere l'energia potenziale del sistema, determinare gli equilibri e studiarne la stabilità con i teoremi visti nel corso
- b) Si supponga ora che il sistema $Oxyz$ ruoti rispetto agli spazi inerziali con velocità angolare ω costante attorno all'asse verticale y . Indagare equilibri e stabilità nel sistema rotante.
- c) Nelle ipotesi del punto a) (sistema non rotante) si scriva l'energia cinetica del sistema, l'equazione di Lagrange e la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile
- d) Si supponga ora che l'estremo O dell'asta non sia più vincolato nell'origine. Si introduca la nuova coordinata $x = x_O$ per descrivere la posizione del sistema, ora 2-dimensionale. Si scriva l'energia cinetica e potenziale del nuovo sistema. Quali sono gli integrali primi del nuovo sistema?
- e) Si supponga ora che la matrice dell'energia cinetica del sistema sia semplicemente

$$A = \text{Diag}[ml^2, ml^2]$$

Si studi il moto del sistema con il metodo di Hamilton-Jacobi.

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente a due delle domande seguenti

- 1 Metodi di Hamilton Jacobi per sistemi separabili
- 2 Trasformazioni canoniche e loro caratterizzazione
- 3 integrali primi, equilibri e stabilità dell'equazione di Eulero del corpo rigido non soggetto a momenti

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

- 3 Teorema di Lagrange-Dirichlet sulla stabilità degli equilibri
- 4 Teorema di Noether

-
- Scrivere nome e cognome **in stampatello** su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)
 - Consegnare solo la bella copia
-

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

A1. L'energia potenziale gravitazionale ed elastica è

$$U(\theta) = U^g(\theta) + U^{el}(\theta) = mgl \sin \theta + \frac{h}{2} 2(l \cos \theta)^2$$

Gi equilibri sono dati da

$$U'(\theta) = mgl \cos \theta - 2hl^2 \cos \theta \sin \theta = 0$$

e quindi

$$\theta_1 = \pi/2, \quad \theta_2 = 3\pi/2, \quad \theta_{3,4} = \arcsin \lambda, \quad \lambda = \frac{mg}{2hl} \leq 1$$

Avendo sole forze conservative, possiamo usare TLD e anche THND che da condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità.

$$H_U(\theta) = U''(\theta) = 2hl^2[-\lambda \sin \theta - 1 + 2 \sin^2 \theta]$$

da cui si vede che

$$H_U(\pi/2) = 1 - \lambda, \quad H_U(3\pi/2) = 1 + \lambda, \quad H_U(\theta_{3,4}) = \lambda^2 - 1$$

Quindi $\theta_{3,4}$ ove esistono sono instabili. Per $\lambda = 1$ THND non dà informazioni. La stabilità si può accertare con lo studio delle derivate successive di U .

b) Se ora il riferimento ruota attorno all'asse verticale y , bisogna tener conto delle forze fittizie. la forza di Coriolis ha componenti Lagrangiane nulle perch è ortogonale al piano Oxy mentre le velocità virtuali appartengono a tale piano. Quindi posso continuare ad usare THND. Aggiungo il potenziale della forza centrifuga

$$U^{cf}(\theta) = -\frac{\omega^2}{2} m(l \cos \theta)^2$$

quindi

$$U(\theta) = mgl \sin \theta + [h - \frac{m\omega^2}{2}](l \cos \theta)^2$$

L'analisi degli equilibri e stabilità si svolge allo stesso modo di quanto fatto sopra.

c) L'energia cinetica del sistema è $T = \frac{m}{2} L^2 \dot{\theta}^2$, la lagrangiana è

$$L = T - U = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - U(\theta)$$

l'equazione di Lagrange è

$$ml^2 \ddot{\theta} = -U'(\theta)$$

e l'equazione delle piccole oscillazioni, per esempio attorno a $\theta_2 = 3\pi/2$ è

$$H_U(\theta_2) - \omega^2 A = 1 + \lambda - \omega^2 ml^2 = 0, \quad \omega^2 = \frac{1 + \lambda}{ml^2}$$

d) Nel caso in cui il punto O dell'asta non è più vincolato nell'origine, il potenziale non cambia, l'energia cinetica invece diviene

$$T = \frac{m}{2} v_P^2 = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 - 2l \sin \theta \dot{x} \dot{\theta}]$$

quindi ora $L = L(\theta, \dot{x}, \dot{\theta})$. Ci sono quindi due integrali primi

$$E = T + U, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{cost.}$$

e) Se ora la matrice dell'energia cinetica è quella scritta nel testo $A = \text{Diag}[ml^2, ml^2]$, l'Hamiltoniana è $H = T + U$ e quindi

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{p_x^2}{ml^2} + \frac{p_\theta^2}{ml^2} \right] + U(\theta)$$

Il sistema è separabile e anche ha tutte le coordinate cicliche tranne una. La soluzione si scrive con i metodi visti nel corso.