
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
PRIMA PROVA PARZIALE - A — 1 Aprile 2015

Esercizio A

1. Un punto materiale di massa m si muove lungo una guida rettilinea che giace nel piano Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y orientato concordemente a $-g$. La guida passa per l'origine O e forma un angolo $\alpha < \pi/2$ con la direzione *negativa* dell'asse y . Si riferisca la posizione del punto P all'ascissa s sulla guida, orientata concordemente a g . Sia $\mathbf{t}$ il versore sulla guida. Oltre alla forza peso, sul punto P agisce una molla lineare di costante elastica h tesa tra l'origine O e il punto P . Tutti i vincoli sono lisci.

- a) Scrivere l'equazione del moto del punto e proiettarla sul versore $\mathbf{t}$
- b) Usando la conservazione dell'energia, tracciare il ritratto in fase del sistema, determinare qualitativamente gli equilibri del sistema nel piano delle fasi e indagare la loro stabilità con i metodi visti nel corso (Teorema di Lyapunov, Teorema spettrale).
- c) Ripetere quanto fatto nei punti a) e b) nel caso in cui il sistema ruoti con velocità angolare costante ω attorno all'asse y . Discutere i casi possibili al variare di ω

Esercizio B

Nel piano Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y diretto verso l'alto giace una guida curvilinea di equazione $y = f(x) = x^3 - x$. Un punto materiale di massa m si muove lungo la guida supposta liscia sotto l'azione della gravità.

- a) Usando la conservazione dell'energia, tracciare il ritratto in fase del sistema, determinare qualitativamente gli equilibri del sistema nel piano delle fasi.
- b) scrivere l'equazione del moto al primo ordine che si ottiene derivando rispetto al tempo l'integrale primo dell'energia lungo un moto. Per questo punto usare $f(x)$ e $a(x) = 1 + f''(x)$ senza specificare la forma di f .
- c) Oltre al punto, un disco di massa M e raggio R si muove con il baricentro vincolato a scorrere sulla guida. Si usi l'ascissa $x = x_G$ del baricentro per descrivere la posizione del disco. Supponendo che il sistema ruoti attorno all'asse y con velocità angolare costante, scrivere il potenziale centrifugo del sistema.

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente a **una** a scelta delle domande seguenti

- 1 Determinazione della legge oraria del moto a partire dalla relazione $e = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x)$
- 2 Enunciato e dimostrazione del teorema di Lyapunov sulla stabilità dell'equilibrio.
Dare preliminarmente la definizione di equilibrio stabile e asintoticamente stabile

Dimostrare **due** dei teoremi seguenti

- 3 Energia cinetica e momento della quantità di moto per un sistema particellare rigido con un punto fisso
- 4 Equazioni Cardinali per un sistema particellare nell'ipotesi che le forze interne abbiano risultante e momento nulli
- 5 Formula di Galileo sulla relazione tra le velocità nei sistemi di riferimento

-
- Scrivere nome e cognome **in stampatello** su ogni foglio consegnato
 - Consegnare solo la bella copia
-

SOLUZIONI

Esercizio A

a) Le forze agenti sono la forza elastica $F = -hOP = -st$, il peso e la reazione vincolare Φ che mantiene il punto sulla guida. L'equazione del moto (vettoriale) è $ma = F + \Phi + mg$. Usiamo il versore $\mathbf{t}$ per scrivere l'accelerazione come $a = \ddot{s}\mathbf{t}$ e proiettiamo l'equazione vettoriale su $\mathbf{t}$ per usare la condizione di vincolo liscio $\Phi \cdot \mathbf{t} = 0$. Si ha allora

$$m\ddot{s} = -hs - mg\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{t} = -hs + mg \cos \alpha$$

che è del tipo $m\ddot{s} = f(s) = a - bs$ con $a = mg \cos \alpha, b = h > 0$. L'energia potenziale associata è banalmente

$$U(s) = -as + \frac{b}{2}s^2 + cost.$$

e quindi è una parabola con concavità verso l'alto. Vi è dunque un unico equilibrio $s^* = a/b$ che dallo studio delle curve di livello risulta stabile.

b) Il sistema è soggetto a sole forze conservative e quindi l'energia totale $E = T + U = m\dot{s}^2/2 + U(s)$ è un integrale primo e risulta avere un minimo stretto in $(s^*, 0)$ che risulta quindi stabile per il Teorema di Liapunov.

c) se ora il sistema ruota attorno all'asse verticale y con velocità angolare costante, dobbiamo aggiungere nell'equazione vettoriale del moto le forze apparenti, F^{cf} e F^{cor} . Proiettiamo ancora su $\mathbf{t}$ sapendo che

$$F^{cor} \cdot \mathbf{t} = -2m\omega\mathbf{e}_2 \times \dot{s}\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 0$$

e che

$$F^{cf} \cdot \mathbf{t} = m\omega^2 s \sin \alpha \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{t} = m\omega^2 \sin^2 \alpha s = cs$$

ove $c = m\omega^2 \sin^2 \alpha > 0$. L'equazione del moto trovata in precedenza diventa ora

$$m\ddot{s} = a + (c - b)s$$

e rappresenta una parabola con concavità verso l'alto se $c - b > 0$ o verso il basso se $c - b < 0$ ovvero se ω soddisfa a

$$m\omega^2 \sin^2 \alpha > h, \quad m\omega^2 \sin^2 \alpha < h.$$

e una retta se $c - b = 0$. In quest'ultimo caso non vi sono equilibri. Negli altri due vi è l'equilibrio $s^* = a/(c - b)$. Dallo studio delle curve di livello si vede che è stabile se $c - b > 0$ e instabile se $c - b < 0$. La stabilità si accerta come prima con il T di Liapunov, l'instabilità con il teorema spettrale. Scriviamo il sistema al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{s} &= v \\ \dot{v} &= m^{-1}f(s) = a - (c - b)s \end{cases}$$

che risulta essere già lineare! La matrice del sistema linearizzato è e linearizziamolo negli equilibri:

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{f'(s)}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s - s^* \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-(c-b)}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s - s^* \\ v \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice A , costante, usando la formula

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr}(A)}{2} \pm \frac{\sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

si ha $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-(c - b)m^{-1}}$ e quindi l'equilibrio, iperbolico, è instabile per il sistema nonlineare avendo un autovalore con parte reale positiva.

Esercizio B

a) La posizione del punto materiale è $OP = (x, f(x))$ con velocità

$$v = dOP/dt = (\dot{x}, f'(x)\dot{x})$$

e energia cinetica

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + f'^2\dot{x}^2) = \frac{m}{2}a(x)\dot{x}^2, \quad a = 1 + f'^2$$

L'energia potenziale gravitazionale è $U(x) = mgy = mgf(x)$. Il sistema è a vincoli lisci e forze conservative per cui vale la conservazione dell'energia. Le curve di livello si tracciano a partire dal grafico di $U(x)$. Il sistema ha un massimo in $x = -1$ e un minimo in $x = 1$ corrispondenti rispettivamente ad un equilibrio instabile e stabile.

b) la conservazione dell'energia si scrive

$$e = T + U = \frac{m}{2}a(x)\dot{x}^2 + mgf(x)$$

e derivando si ha

$$0 = ma\dot{x}\ddot{x} + \frac{m}{2}\dot{x}^2 a' \dot{x} + mgf' \dot{x}$$

Ove $\dot{x} \neq 0$, l'equazione si scrive

$$ma\ddot{x} = -[\frac{m}{2}\dot{x}^2 a' + mgf']$$

e al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{[\frac{1}{2}\dot{x}^2 a'(x) + 1gf'(x)]}{a(x)} \end{cases}$$

c) il potenziale centrifugo del punto P e del disco D è

$$U^{cf} = U_P^{cf} + U_D^{cf} = -\frac{m}{2}\omega^2 x^2 - \frac{I_D^y}{2}\omega^2, \quad I_D^y = Mx_G^2 + \frac{MR^2}{4}$$