
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
SECONDA PROVA PARZIALE — 27 Maggio 2015

Parte A. Esercizi

A1. Nel piano verticale Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y verticale diretto come $-g$ si consideri il sistema costituito da un anello omogeneo di massa M e raggio R che rotola *potendo strisciare* sull'asse orizzontale x e da un punto materiale P di massa m incollato in un punto dell'anello. Si definisca la posizione dell'anello mediante l'ascissa $x = x_G$ del baricentro dell'anello e mediante l'angolo θ tra la direzione positiva dell'asse x e il diametro AP dell'anello passante per P , valutato positivamente in senso antiorario. Sul sistema agiscono due molle di costante elastica h e lunghezza a riposo nulla, una tesa tra il baricentro G del disco e il punto G' di eguale ordinata sull'asse y e una tesa tra il punto A diametralmente opposto a P e il punto A' di eguale ascissa sull'asse x

- a) Scrivere l'energia potenziale del sistema, studiare gli equilibri del sistema e la loro stabilità con i teoremi visti nel corso
- b) Scrivere l'energia cinetica del sistema e determinare le frequenze di piccola oscillazione attorno ad una posizione di equilibrio stabile (non serve fare il calcolo esplicito delle radici dell'equazione di secondo grado).
- c) Si supponga ora che sul sistema non agisca più la molla tesa tra G e G' . Dire quali sono gli integrali primi del sistema e calcolare la funzione di Routh del sistema
- d) sempre supponendo che sul sistema non agisca più la molla tesa tra G e G' , si supponga che la matrice dell'energia cinetica del sistema sia diagonale

$$A = \text{Diag}[A_{xx}, A_{\theta\theta}] = [M + m, (m + M)R^2]$$

Si scriva la nuova Lagrangiana del sistema, l'Hamiltoniana corrispondente e si studi il moto del sistema con il metodo di Hamilton Jacobi

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente a due delle domande seguenti

- 1 Principio variazionale di Hamilton
- 2 Integrali primi del corpo rigido e stabilità delle rotazioni stazionarie
- 3 Parentesi di Poisson: definizione, proprietà e relazione con gli integrali primi del sistema hamiltoniano

Dimostrare i due teoremi seguenti

- 3 Teorema di Poinsot per il corpo rigido
- 4 Teorema di Noether (facoltativo: applicazioni del Teorema)

-
- Scrivere nome e cognome **in stampatello** su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)
 - Consegnare solo la bella copia
-

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

A.1 L'energia potenziale del sistema è $U = U^{el} + U^g$

$$U^{el} = \frac{h}{2}x^2 + \frac{h}{2}R^2(1 - \sin \theta)^2, \quad U^g = mgR \sin \theta$$

Gli equilibri sono i punti ove si annulla il gradiente dell'energia potenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = hx = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = (mg - hR)R \cos \theta + hR^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $x = 0$, $\cos \theta = 0$ quindi $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ e le soluzioni di

$$\sin \theta = \frac{hR - mg}{hR} = 1 - \frac{mg}{hR} \quad \text{se} \quad \frac{mg}{hR} \leq 2$$

abbiamo quindi gli equilibri $P(x, \theta)$

$$P_1 = (0, \frac{\pi}{2})$$

$$P_2 = (0, \frac{3\pi}{2})$$

$$P_3 = (0, \theta_3), \quad P_4 = (0, \pi - \theta_3), \quad \sin \theta_3 = 1 - \frac{mg}{hR}$$

Per la stabilità, avendo sole forze conservative, possiamo usare il THND, che dà condizioni necessarie e sufficienti. La matrice hessiana è

$$H_U(x, \theta) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & U_{\theta\theta}(x, \theta) \end{pmatrix}$$

ove

$$U_{\theta\theta}(x, \theta) = -(mg - hR)R \sin \theta + hR^2(1 - 2\sin^2 \theta)$$

Quindi, per THND, l'equilibrio è stabile se e solo se $U_{\theta\theta}(P) > 0$. Si ha

$U_{\theta\theta}(P_1) = -mgR$ quindi P_1 è instabile;

$U_{\theta\theta}(P_2) = R(mg - 2hR)$ quindi P_2 è stabile se e solo se $mg > 2hR$;

$U_{\theta\theta}(P_3) = U_{\theta\theta}(P_4) = mg(2hR - mg)/h$ quindi P_3, P_4 sono stabili ove esistono.

Energia cinetica. L'energia cinetica dell'anello (teorema di König) è

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

l'energia cinetica del punto è

$$T_P = \frac{1}{2}mv_P^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\sin \theta \dot{x}\dot{\theta})$$

quindi la matrice dell'energia cinetica è

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} M + m & mR \sin \theta \\ mR \sin \theta & (m + M)R^2 \end{pmatrix}$$

La frequenza delle piccole oscillazioni attorno a P si trova dalla formula

$$\det(H_U(P) - \omega^2 A(P)) = 0$$

Routhiano. Togliendo la molla tra G e G' il potenziale e quindi la lagrangiana diventa indipendente dalla coordinata x . Quindi, oltre all'energia $E = T + U$ abbiamo l'integrale primo di ciclicità

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} - mR \sin \theta \dot{\theta} = c$$

da cui ricaviamo

$$\hat{x}(\theta, \dot{\theta}, c) = \frac{mR \sin \theta \dot{\theta} + c}{M + m}$$

e

$$R^c(\theta, \dot{\theta}) = L(\theta, \dot{\theta}, \hat{x}) - c\hat{x}$$

Metodo di Hamilton-Jacobi. Se la lagrangiana è di tipo meccanico, $L = T - U$ con $2T = A\dot{q} \cdot \dot{q}$, l'hamiltoniana è di tipo $H = T + U$ con $2T = A^{-1}p \cdot p$. Se ora la matrice dell'energia cinetica è diagonale, la sua inversa si calcola senza difficoltà e si ottiene

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{p_x^2}{M + m} + \frac{p_\theta^2}{(m + M)R^2} \right] + U(\theta)$$

L'hamiltoniana è quindi del tipo separabile e anche del tipo tutte coordinate cicliche tranne una. La soluzione si trova con il metodo visto nel corso.