
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
SECONDO APPELLO — 10 Luglio 2014

Parte A. Esercizi

A1. Nel riferimento inerziale $Oxyz$ con l'asse z verticale ascendente, si consideri la superficie di equazione $z = f(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ con

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Un punto P di massa m è vincolato in modo liscio a rimanere sulla superficie ed è soggetto alla sola gravità. Si usino come coordinate lagrangiane le x, y .

- a) determinare gli equilibri del sistema e discutere la stabilità
- b) scrivere l'energia cinetica del sistema, e la frequenza delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio $(0, 0)$ supposto stabile
- c) si supponga ora che il sistema $Oxyz$ ruoti rispetto ad un riferimento inerziale con velocità angolare costante $\omega = \omega \hat{z}$. Scrivere la lagrangiana del sistema nel riferimento non inerziale e determinare gli equilibri del sistema. Studiare la stabilità dell'origine $(0, 0)$ nell'ipotesi che

$$f_{xy}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0.$$

- d) si scriva la lagrangiana del sistema linearizzato attorno all'origine supposta configurazione di equilibrio stabile (quindi vale la condizione $f_{xy}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$). Si studi la dinamica del sistema Hamiltoniano associato con il metodo di Hamilton-Jacobi.

Parte B. Domande sulla Teoria

Discutere in modo esauriente (i.e. non dare solo la definizione) due degli argomenti seguenti

- 1 Equazione di Eulero del corpo rigido non soggetto a momenti
- 2 Parentesi di Poisson
- 3 Equivalenza tra equazioni di Lagrange e di Hamilton

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

- 3 Principio variazionale di Hamilton
- 4 Teorema di Lagrange-Dirichlet

-
- Scrivere nome e cognome **in stampatello** su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)
 - Consegnare solo la bella copia
-

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

A1. La sola forza agente è la gravità, conservativa, di energia potenziale $U(x, y) = mgz = mgf(x, y)$. Le configurazioni di equilibrio sono i punti ove $\nabla U = 0$ e quindi l'origine $(0, 0)$ è il solo equilibrio in base alle ipotesi. La stabilità si può accertare con il THND e quindi l'origine è stabile se e solo se la matrice hessiana $H_U(0, 0)$ è definita positiva. L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (f_x\dot{x} + f_y\dot{y})^2]$$

con associata matrice dell'energia cinetica

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}.$$

Le frequenze di piccola oscillazione sono le soluzioni in ω^2 dell'equazione $\det[H_U(0, 0) - \omega^2 A(0, 0)] = 0$ e quindi essendo $f_x = f_y = 0$ nell'origine si ha $A(0, 0) = \mathbb{I}$ e

$$\det \begin{pmatrix} mgf_{xx} - m\omega^2 & mgf_{xy} \\ mgf_{xy} & mgf_{yy} - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

Se ora il sistema $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante attorno all'asse z dobbiamo tener conto, oltre alla gravità, della forza centrifuga, conservativa, e della forza di Coriolis. Quest'ultima è giroscopica e nulla negli equilibri (la velocità è nulla). L'energia potenziale centrifuga è

$$U^{cf}(x, y) = -\frac{m\omega^2}{2}|PP'|^2 = -\frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

Gli equilibri sono quindi le soluzioni di $\nabla(U^g + U^{cf}) = 0$ ovvero

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -mgf_x - m\omega^2 x = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -mgf_y - m\omega^2 y = 0 \end{cases}$$

e quindi l'origine è ancora equilibrio per il sistema. Posso studiarne la stabilità con il TLD in quanto sono presenti forze giroscopiche (Coriolis). La matrice Hessiana valutata nell'origine è

$$H_U(0, 0) = \begin{pmatrix} mgf_{xx} - m\omega^2 & 0 \\ 0 & mgf_{yy} - m\omega^2 \end{pmatrix}$$

e quindi (condizione sufficiente non necessaria) abbiamo stabilità dell'origine se in $(0, 0)$

$$gf_{xx} - \omega^2 > 0, \quad gf_{yy} - m\omega^2 > 0.$$

La lagrangiana del sistema linearizzato, nelle ipotesi fatte, è $q = (x, y)$

$$L = \frac{1}{2}A(0)\dot{q} \cdot \dot{q} - \frac{1}{2}H_U(0) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}mg(f_{xx}(0, 0) + f_{yy}(0, 0))$$

L'Hamiltoniana associata è del tipo

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}mg(f_{xx}(0, 0) + f_{yy}(0, 0))$$

si tratta quindi di un sistema separabile da trattare con i metodi visti nel corso.