LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
TERZO APPELLO — 10 Settembre 2013

Parte A. Esercizi

A1. Nel riferimento inerziale $Oxyz$ con l'asse z vericale ascendente, si consideri la superficie di equazione $z = f(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}$ con

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Un punto P di massa m è vincolato in modo liscio a rimanere sulla superficie ed è soggetto alla sola gravità. Si usino come coordinate lagrangiane le x, y.

a) determinare gli equilibri del sistema e discutere la stabilità

b) scrivere l'energia cinetica del sistema, e la frequenza delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio $(0, 0)$ supposto stabile

c) si supponga ora che il sistema $Oxyz$ ruoti rispetto ad un riferimento inerziale con velocità angolare costante $\omega = \omega\hat{z}$. Scrivere la lagrangiana del sistema nel riferimento non inerziale e determinare gli equilibri del sistema. Studiare la stabilità dell'origine $(0, 0)$ nell'ipotesi che
$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

A2. Scrivere l'equazione di Eulero nella velocità angolare incognita $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T \in \mathbb{R}^3$ di un corpo rigido con un punto fisso O avente matrice d'inerzia

$$I_O = Diag[I_1, I_2, I_3]$$

e soggetto ad un momento esterno $N_O = (-k\omega_1, -k\omega_2, -k\omega_3)^T$ con $k > 0$. Mostrare che $\omega = (0, 0, 0)$ è un equilibrio stabile dell'equazione $\dot{\omega} = X(\omega)$.

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente a una delle domande seguenti

1 Trasformazioni canoniche

2 Parentesi di Poisson

3 Equivalenza tra equazioni di Lagrange e di Hamilton

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

3 Principio variazionale di Hamilton

4 Teorema di Noether

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)*
- *Consegnare solo la bella copia*

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

A1. La sola forza agente è la gravità, conservativa, di energia potenziale $U(x,y) = mgz = mgf(x,y)$. Le configurazioni di equilibrio sono i punti ove $\nabla U = 0$ e quindi l'origine $(0,0)$ è il solo equilibrio in base alle ipotesi. La stabilità si può accertare con il THND e quindi l'origine è stabile se e solo se la matrice hessiana $H_U(0,0)$ è definita positiva. L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (f_x\dot{x} + f_y\dot{y})^2]$$

con associata matrice dell'energia cinetica

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 1+f_x^2 & f_xf_y \\ f_xf_y & 1+f_y^2 \end{pmatrix}.$$

Le frequenze di piccola oscillazione sono le soluzioni in ω^2 dell'equazione $\det[H_U(0,0) - \omega^2 A(0,0)] = 0$ e quindi essendo $f_x = f_y = 0$ nell'origine si ha $A(0,0) = \mathbb{I}$ e

$$\det\begin{pmatrix} mgf_{xx} - m\omega^2 & mgf_{xy} \\ mgf_{xy} & mgf_{yy} - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

Se ora il sistema $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante attorno all'asse z dobbiamo tener conto, oltre alla gravità, della forza centrifuga, conservativa, e della forza di Coriolis. Quest'ultima è giroscopica e nulla negli equilibri (la velocità è nulla). L'energia potenziale centrifuga è

$$U^{cf}(x,y) = -\frac{m\omega^2}{2}|PP'|^2 = -\frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

Gli equilibri sono quindi le soluzioni di $\nabla(U^g + U^{cf}) = 0$ ovvero

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} &= -mgf_x - m\omega^2 x = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial s} &= -mgf_y - m\omega^2 y = 0 \end{cases}$$

e quindi l'origine è ancora equilibrio per il sistema. Posso studiarne la stabilità con il TLD in quanto sono presenti forze giroscopiche (Coriolis). La matrice Hessiana valutata nell'origine è

$$H_U(0,0) = \begin{pmatrix} mgf_{xx} - m\omega^2 & 0 \\ 0 & mgf_{yy} - m\omega^2 \end{pmatrix}$$

e quindi (condizione sufficiente non necessaria) abbiamo stabilità dell' origine se in $(0,0)$

$$gf_{xx} - \omega^2 > 0, \quad gf_{yy} - m\omega^2 > 0.$$

A.2 L'equazione di Eulero $I_O\dot{\omega} + \omega \times I_O\omega = N_O$ si scrive in componenti

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= -k\omega_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_2\omega_3 &= -k\omega_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= -k\omega_3 \end{cases}$$

e si vede quindi che $\omega = (0,0,0)$ è un equilibrio. L'equazione del primo ordine si può riscrivere come

$$\dot{\omega} = -kI_O^{-1}\omega + I_O^{-1}(\omega \times I_O\omega)$$

Se uso il metodo spettrale per studiare la stabilità, devo linearizzare e valutare nell'equilibrio che è l'origine. Allora il secondo termine, quadratico in ω si annulla e quindi il sistema linearizzato è

$$\dot{\omega} = -kI_O^{-1}\omega = A\omega$$

e si vede che la matrice A ha tutti autovalori reali negativi, quindi l'origine è asintoticamente stabile.