LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
QUARTO APPELLO — 19 Settembre 2013

Parte A. Esercizi

A1. Nel riferimento inerziale $Oxyz$ con l'asse z verticale ascendente, si consideri la superficie sferica con centro nell'origine e raggio unitario. Un punto P di massa m si muove senza attrito sulla superficie della sfera. Si riferisca la posizione del punto alla coordinate sferiche $\theta \in (0, \pi)$ -latitudine- e $\phi \in [0, 2\pi)$ -longitudine. Il punto *non* è soggetto a gravità, ma alla forza conservativa di energia potenziale

$$U(\theta, \phi) = \frac{a}{2} \cos^2 \theta + \frac{b}{2} \phi^2, \qquad a, b > 0.$$

a) Determinare gli equilibri del sistema e discutere la stabilità

b) scrivere l'energia cinetica del sistema, e la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad un equilibrio stabile

c) si supponga d'ora in poi $b = 0$. Scrivere il Routhiano del sistema e studiare gli equilibri del sistema ridotto

d sempre nel caso $b = 0$, scrivere l'hamiltoniana del sistema e calcolare il moto con il metodo di Hamilton-Jacobi a meno di quadrature

A.2 Un punto materiale di massa m si muove su una guida liscia rettilinea. Si riferisca la posizione del punto alla coordinata $x \in \mathbb{R}$. Il punto è soggetto alla forza posizionale

$$f(x) = -2x + 3x^2.$$

a) Studiare il moto del sistema con il metodo qualitativo, tracciare il ritratto in fase, determinare la legge oraria a meno di quadrature.

b) cosa succede agli equilibri se si aggiunge una forza $g(\dot{x}) = -k\dot{x}$, $k > 0$? Motivare la risposta

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente a una delle domande seguenti

1 Definizione di Trasformazione canonica e caratterizzazione delle trasformazioni canoniche indipendenti dal tempo

2 Scrivere il momento della quantità di moto per un sistema rigido di punti materiali con un punto fisso O, introdurre il tensore d'inerzia e dare enunciato e dimostrazione del Teorema di Steiner

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

3 Teorema di variazione dell'energia per un sistema lagrangiano a vincoli mobili e sollecitazione conservativa e dissipativa.

4 Teorema di Poinsot del moto del corpo rigido

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)*
- *Consegnare solo la bella copia*

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

A1. Le configurazioni di equilibrio sono i punti ove $\nabla U = 0$ e sono le soluzioni del sistema

$$U_\theta = -a\cos\theta\sin\theta = 0, \qquad U_\phi = b\phi = 0$$

Si hanno quindi gli equilibri (θ, ϕ) seguenti: $(0,0), (\pi/2, 0), (\pi, 0)$. Si noti che per $\theta = 0, \theta = \pi$ la parametrizzazione locale della varietà scelta non è definita. La stabilità si può accertare con il THND. La matrice hessiana H_U è

$$H_U(\theta\phi) = \begin{pmatrix} -a(1-2\sin^2\theta) & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

e quindi l'equilibrio $(\pi/2, 0)$ è stabile, mentre gli altri sono instabili.

L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}[\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\phi^2]$$

con associata matrice dell'energia cinetica valutata nell'equilibrio stabile $(\pi/2, 0)$

$$A(\pi/2, 0) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}.$$

Le frequenze di piccola oscillazione sono le soluzioni in ω^2 dell'equazione $\det[H_U(\pi/2,0) - \omega^2 A(\pi/2, 0)] = 0$ e quindi

$$\det\begin{pmatrix} a - m\omega^2 & 0 \\ 0 & b - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

Nel caso $b = 0$, la coordinata ϕ è ciclica. Possiamo scrivere il Routhiano come

$$R^c(\theta, \dot\theta) = \frac{m}{2}\dot\theta^2 - V(\theta) = \frac{m}{2}\dot\theta^2 - a\cos^2\theta - \frac{c^2}{2m\sin^2\theta}.$$

Dallo studio del grafico del potenziale $V(\theta)$ in $(0,\pi)$ si vede che $\theta = \pi/2$ è (l'unico) minimo e quindi è stabile.

Per studiare con il metodo di Hamilton-Jacobi, sriviamo l'hamiltoniana, che è della forma $H = T + U$ e quindi

$$H(\theta, p_\theta, p_\phi) = \frac{p_\theta^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2m\sin^2\theta} + U(\theta).$$

L'hamiltoniana è quindi del tipo indipendente dal tempo e con tutte le coordinate cicliche tranne una. La funzione generatrice, ponendo $P_\theta = E$ si scrive

$$S(\theta, \phi, P_\phi, E) = -Et + P_\phi\phi + W(\theta, E, P_\phi).$$

La soluzione procede con il metodo standard visto nel corso.

A.2 Si ha $f(x) = -U'(x) = -2x + 3x^2$ da cui

$$U(x) = x^2 - x^3 + c$$

Gli equilibri del sistema sono gli zeri di f e quindi $x = 0$ e $x = 2/3$. Per studiare la stabilità uso THND e quindi $U''(0) = 2 > 0$, minimo quindi stabile e $U''(2/3) = -2$ massimo, quindi instabile. Lo studio del grafico di U per costruire i ritratto di fase conferma i risultati. La legge oraria è data, a meno di quadrature da

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(e - x^2 + x^3)}}.$$

Se si aggiunge una forza viscosa, gli equilibri stabili minimi di U rimangono stabili per il TLD mentre nulla si può dire per gli equilibri instabili massimi di U. Usando il metodo spettrale, si vede che gli equilibri stabili diventano asintoticamente stabili, mentre quelli instabili permangono instabili.