
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
PRIMO APPELLO — 20 Giugno 2013

Parte A. Esercizi

1. In un riferimento inerziale $Oxyz$ con l'asse y verticale ascendente, si consideri un'asta OA di massa *nulla* con l'estremo O vincolato in modo liscio nell'origine e un punto P di massa m vincolato nell'estremo A . L'asta si muove rimanendo nel piano verticale Oxy . Si usi come coordinata lagrangiana l'angolo θ tra la direzione positiva dell'asse y e il segmento OA valutato positivamente in senso orario. Oltre alla gravità, sul sistema agisce una molla di costante elastica $h > 0$ tesa tra il punto A e il punto A' sull'asse y di eguale ordinata.

- a) Scrivere l'energia potenziale $U(\theta)$, calcolare gli equilibri e studiarne la stabilità al variare del parametro $\lambda = mg/hl$.
- b) Accertare l'instabilità degli eventuali equilibri *instabili* con i metodi e teoremi visti nel corso.

Suggerimento: Nel seguito, usare ove possibile la forma sintetica $U(\theta)$ invece che la forma esplicita dell'energia potenziale calcolata al punto a)

Facoltativo: Come si procede per accertare l'instabilità se si aggiunge una forza viscosa applicata in A , $F_A = -kv_A$, $k > 0$?

- c) Si tolga ora la forza F_A , il vincolo che costringe l'asta a muoversi nel piano verticale Oxy e si introduca quindi l'ulteriore coordinata lagrangiana ϕ , angolo tra la direzione positiva dell'asse x e il segmento OA'' , proiezione di OA sul piano orizzontale Oxz . Si scriva l'energia cinetica del sistema (può essere utile la formula della velocità di un punto in coordinate sferiche)
- d) Si scrivano le equazioni del moto del sistema con il metodo di Routh; quali sono gli integrali primi?
- e) si scriva l'hamiltoniana del sistema e si studi il moto del sistema a meno di quadrature con il metodo di Hamilton-Jacobi

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente alle domande seguenti

- 1 Cinematica rigida relativa
- 2 Definizione di trasformazione canonica e condizione sufficiente di canonicità per trasformazioni indipendenti dal tempo (enunciato e dimostrazione)

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

- 3 Teorema di Noether
- 4 Teorema di Lyapunov sulla stabilità

-
- Scrivere nome e cognome **in stampatello** su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)
 - Consegnare solo la bella copia
-

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

1.a) L'energia potenziale associata è

$$U(\theta) = U^g(\theta) + U^{el}(\theta) = mgl \cos \theta + \frac{h}{2} l^2 \sin^2 \theta.$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti ove $U'(\theta) = 0$

$$U'(\theta) = l \sin \theta (-mg + hl \cos \theta) = 0.$$

Abbiamo quindi le soluzioni $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e le soluzioni

$$\theta_{3,4} = \cos^{-1}\left(\frac{mg}{hl}\right), \quad \text{se} \quad \lambda = \frac{mg}{hl} \leq 1.$$

Avendo sole forze conservative, la stabilità si pu studiare con TLD (condizioni solo sufficienti) o con THND (condizioni necessarie e sufficienti). In ogni caso dobbiamo calcolare la matrice hessiana

$$U''(\theta) = hl^2 \cos \theta (\cos \theta - \lambda) - hl^2 \sin \theta^2$$

Abbiamo quindi che

$$U''(\theta_1) = hl^2(1 - \lambda)$$

quindi θ_1 è stabile se $\lambda < 1$, instabile se $\lambda > 1$ e nulla si può dire con lo studio dell'hessiana se $\lambda = 1$. Inoltre

$$U''(\theta_2) = hl^2(1 + \lambda)$$

e quindi è sempre stabile. Infine

$$U''(\theta_{3,4}) = -hl^2(1 - \lambda^2)$$

quindi tali equilibri, ove esistono $\lambda \leq 1$ sono instabili.

b) In presenza di sole forze conservative, l'instabilità si può accertare con THND. Se vi sono forze non conservative aventi componenti lagangiane non nulle, non possiamo più usare THND e dobbiamo ricorrere al metodo spettrale. Per scrivere l'equazione del moto possiamo usare le equazioni di lagrange per sistemi a forze conservative e non conservative. L'energia cinetica è

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

la lagrangiana è $L = T - U$ e le equazioni si scrivono

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta$$

ovvero

$$ml^2 \ddot{\theta} = -U'(\theta) - k\dot{\theta}.$$

Verifichiamo con i teoremi visti nel corso. Scriviamo il sistema al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{ml^2} U'(\theta) - \frac{k}{ml^2} v \end{cases}$$

e linearizziamolo negli equilibri:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{ml^2} U''(\theta_{eq}) & -\frac{k}{ml^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta - \theta_{eq} \\ v \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice $A = A(\theta_{eq})$ per usando la formula

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A)}{2} \pm \frac{\sqrt{tr(A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

ovvero

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2ml^2} \pm \frac{\sqrt{(\frac{k}{ml^2})^2 - 4 \frac{U'''(\theta_{eq})}{ml^2}}}{2}.$$

Si vede che gli equilibri prima instabili, caratterizzati da $U''(\theta) < 0$ danno luogo a equilibrio iperbolici quindi instabili per il sistema nonlineare avendo un autovalore con parte reale positiva.

c) Ora il sistema è due-dimensionale. L'energia cinetica è

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

e la lagrangiana

$$L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - U(\theta).$$

Essa ammette gli integrali primi $E = T + U$ e

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = c, \quad \hat{\phi} = \frac{c}{ml^2 \sin^2 \theta}.$$

d) La funzione di Routh è

$$R^c(\theta, \dot{\theta}) = L(\theta, \dot{\theta}, \hat{\phi}) - c\hat{\phi}.$$

$$R^c(\theta, \dot{\theta}) = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 - U(\theta) - \frac{1}{2} \frac{c^2}{ml^2 \sin^2 \theta}.$$

da cui si calcolano facilmente le equazioni del moto

e) La lagrangiana è quadratica nelle velocità e la matrice dell'energia cinetica è diagonale. Si ha quindi

$$H = T + U = \frac{1}{2}[\frac{p_\theta^2}{ml^2} + \frac{p_\phi^2}{ml^2 \sin^2 \theta}] + U(\theta).$$

La hamiltoniana è quindi della forma "tutte cicliche tranne una" e si determina la funzione generatrice con la procedura vista nel corso.