
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
SECONDO APPELLO — 22 Luglio 2013

Parte A. Esercizi

A1. Nel piano Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y verticale ascendente giace una guida rettilinea passante per i punti $A = (0, d)$ e $B = (d, 0)$. Un sistema di ascissa s è stabilito sulla guida con origine nel punto A e orientato positivamente nel verso da A a B . Un disco di massa m e raggio R è vincolato con il baricentro G sulla guida a scorrere senza strisciare su una guida parallela alla guida passante per A , B e posta a distanza R dalla prima. Inoltre, sulla guida per $A B$ scorre in modo liscio un punto materiale P di massa M . Oltre alla gravità, sul sistema agiscono due molle di eguale costante elastica h , una tra il baricentro G del disco e il punto G' di eguale ordinata sull'asse y e una posta tra il baricentro G del disco e il punto P . Si riferisca la posizione del disco alla ascissa $x = x_G$ del suo baricentro e la posizione del punto P alla sua ascissa s sulla guida (per esempio $s_P = 0$ se $P \equiv A$). Infine, il sistema $Oxyz$ ruota rispetto ad un riferimento inerziale con velocità angolare costante $\omega = \omega \hat{y}$. Si studi il moto del sistema nel riferimento non inerziale

- a) mostrare che la forza di Coriolis ha componenti lagrangiane nulle
- b) Scrivere l'energia potenziale $U(x, s)$ delle forze conservative agenti sul sistema e scrivere il sistema di equazioni che determina gli equilibri (x_{eq}, s_{eq})
- c) Scrivere la condizioni sui parametri per la quale i) esiste un solo equilibrio e ii) tale equilibrio è stabile. Non occorre determinare esplicitamente tale equilibrio.
- d) Scrivere l'energia cinetica del sistema e l'equazione delle piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio stabile.

A2. Scrivere a meno di quadrature con il metodo di Hamilton-Jacobi il moto del sistema di Lagrangiana

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}(m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) - \frac{h}{2} q_1^2 - mgq_2.$$

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente a due delle domande seguenti

- 1 Moto sotto forze centrali
- 2 Metodo di Routh
- 3 Linearizzazione delle equazioni di Lagrange per $L = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2 - U(q)$ attorno ad un equilibrio stabile

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

- 3 Teorema di Poincaré
- 4 Instabilità delle rotazioni attorno all'asse di momento d'inerzia intermedio

-
- Scrivere nome e cognome **in stampatello** su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)
 - Consegnare solo la bella copia
-

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

A1. a) I vettori v_x e w_X rispettivamente velocità del punto e velocità permessa dal vincolo appartengono al piano del moto assieme a ω . Si ha quindi che la potenza della sollecitazione è (

$$P = \int_{X \in D} -2\rho\omega \times v_X \cdot w_X \equiv 0$$

Questo è equivalente a dire che la forza di coriolis è sempre perpendicolare al piano del moto.

b) Per il disco (uso il T di Steiner per il calcolo del momento d'inerzia del disco rispetto all'asse y)

$$U = U^g + U^{el} + U^{cf} = mg(d - x) + \frac{h}{2}x^2 - \frac{\omega^2}{2}(mx^2 + \frac{mR^2}{4}).$$

per il punto

$$U = U^g + U^{el} + U^{cf} = Mg(d - \frac{s}{\sqrt{2}}) + \frac{h}{2}(s - x\sqrt{2})^2 - \frac{\omega^2}{2}M(\frac{s}{\sqrt{2}})^2$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti ove $\nabla U = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -mg + (h - m\omega^2)x - \sqrt{2}hs + 2hx = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{Mg}{\sqrt{2}} - \frac{M\omega^2}{2}s + hs - \sqrt{2}hx = 0 \end{cases}$$

Il sistema è quindi lineare della forma $BX = C$.

c) La condizione per avere una soluzione unica non nulla è

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 3h - m\omega^2 & -\sqrt{2}h \\ -\sqrt{2}h & h - M\frac{\omega^2}{2} \end{pmatrix} \neq 0$$

e quindi $(3h - m\omega^2)(h - M\frac{\omega^2}{2}) - 2h \neq 0$. La condizione ii) perchè l'equilibrio $X_{eq} = B^{-1}C$ sia stabile è (Teorema THND) che $B = H_U \in Sym^+$ e quindi

$$3h - m\omega^2 > 0, \quad \det B > 0.$$

d) l'energia cinetica del sistema è (per la condizione di puro rotolamento $s = x_G\sqrt{2} = R\theta$)

$$T = T_D + T_P = \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}\omega I_G\omega + \frac{M}{2}v_P^2$$

$$T = \frac{m}{2}2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{2\dot{x}^2}{R^2} + \frac{M}{2}\dot{s}^2 = \frac{1}{2}(3m\dot{x}^2 + M\dot{s}^2)$$

La matrice dell'energia cinetica è quindi diagonale $A = \text{Diag}[3m, M]$. Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni di

$$\det(H_U - \Omega^2 A) = 0.$$