LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
PRIMA PROVA PARZIALE — 11 Aprile 2013

Parte A. Esercizi

1. Nel piano Oxy di un riferimento $Oxyz$ con l'asse y diretto verso l'alto giace un disco di massa m e raggio R. Il disco rotola *senza strisciare* sulla guida di equazione $y = x - R\sqrt{2}$; di conseguenza, il baricentro G del disco si muove sulla retta $y = x$. Si determini la posizione del disco usando l'ascissa s sulla guida, orientata positivamente in direzione ascendente, per cui $OG = s$. Tra il baricentro G del disco e il punto G' di eguale ascissa sull'asse x è tesa una molla di costante elastica h. Inoltre, il disco è soggetto a gravità.

a) Scrivere l'energia potenziale delle forze conservative agenti nel riferimento $Oxyz$ e l'energia cinetica del disco. Determinare le configurazioni di equilibrio. Studiare il sistema con il metodo del ritratto in fase per sistemi uno-dimensionali, tracciando il ritratto in fase e determinando la traiettoria del moto. Indagare la stabilità degli equilibri con lo studio delle orbite.

b) si supponga ora che oltre alle forze conservative agisca una forza non conservativa $Q(\dot{s}) = -k\dot{s}$, $k > 0$. Scrivere $\dot{E} = \frac{d}{dt}(T+U)$ lungo i moti del sistema. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema, determinare gli equilibri e studiarne la stabilità con il metodo spettrale.

c) Ora il riferimento $Oxyz$ ruoti rispetto ad uno spazio inerziale con velocità angolare costante Ω diretta come l'asse y. Si usi l'ascissa s del baricentro sulla guida per descrivere la posizione del disco nel riferimento *non inerziale* $Oxyz$. Scrivere l'energia potenziale delle forze conservative agenti nel sistema rotante. Determinare gli equilibri del sistema.

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente alle domande seguenti

1 Definizione di equilibrio per un sistema di e.d.o. $\dot{x} = X(x)$ e per un sistema meccanico $m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$. Nel primo caso dare anche la definizione di equilibrio stabile e asintoticamente stabile.

2 Definizione di moto dinamicamente possibile, di vincolo ideale o liscio e dimostrazione del Principio di D'Alembert.

Dimostrare *uno a scelta* tra i due teoremi seguenti

3 Deduzione delle Equazioni Cardinali per un sistema di punti materiali

4 Teorema di Coriolis (relazione tra le accelerazioni in un sistema rotante)

- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)*
- *Consegnare solo la bella copia*

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

a) L'ordinata del baricentro è $y_G = s/\sqrt{2}$. L'energia potenziale associata è

$$U(s) = U^g(s) + U^{el} = mg\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{h}{2}\frac{s^2}{2}.$$

L'energia cinetica (Teorema di Konig) tenendo conto della condizione di puro rotolamento $\dot{s} = R\dot{\theta}$ è

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\omega \cdot I_G\omega = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{\dot{s}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\frac{3m}{2}\dot{s}^2.$$

Gli equilibri sono le soluzioni di

$$U'(s) = mg\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{h}{2}s = 0, \qquad s_{eq} = -\frac{mg}{h}\sqrt{2}.$$

Dallo studio del ritratto in fase si vede che l'equilibrio è stabile. La traiettoria del moto si ricava dalla formula

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{\frac{4}{3m}(e - mg\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{h}{2}\frac{s^2}{2})}} + c.$$

che corrsponde a un moto di un oscillatore armonico. (Si veda le note del corso).

b) Il sistema è a vincoli fissi e sollecitazione conservativa e dissipativa. Vale la formula, per $L = T - U$

$$\dot{E} = -\frac{\partial L}{\partial t} - Q\dot{s} = -k\dot{s}^2.$$

L'equazione di Lagrange per la ccordinata s si scrive

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}) - \frac{\partial L}{\partial s} = Q,$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{s} + mg\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{h}{2}s = -k\dot{s}.$$

Gli equilibri sono le coppie $(s_{eq}, 0)$ che annullano il secondo membro del sistema scritto al primo ordine. Scriviamo il sistema al primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= = \frac{2}{3m}(-mg\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{h}{2}s - kv) \end{cases}$$

Si vede che il sistema è lineare e quindi coincide con la sua linearizzazione. La matrice costante e vale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{h}{3m} & -\frac{2k}{3m} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice A usando la formula

$$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A)}{2} \pm \frac{\sqrt{tr(A)^2 - 4\det A}}{2} = -\frac{k}{3m} \pm \sqrt{(\frac{k}{3m})^2 - \frac{h}{3m}}$$

Quindi l'equilibrio $s_{eq} = -\frac{mg}{h}\sqrt{2}$, iperbolico, è asintoticamente stabile avendo sempre tutti gli autovalori con parte reale negativa.

c) Le forze conservative agenti nel sistema non inerziale sono la forza elastica, la forza peso e quella centrifuga. Si ha, usando il teorema Steiner

$$U = U^g + U^{el} + U^{cf} = mg\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{h}{2}\frac{s^2}{2} - \frac{\Omega^2}{2}I_O^y = mg\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{h}{2}\frac{s^2}{2} - \frac{\Omega^2}{2}(\frac{mR^2}{4} + m(\frac{s}{\sqrt{2}})^2)$$

e quindi

$$U(s) = mg\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(\frac{h}{2} - \frac{m\Omega^2}{2})s^2 + cost.$$