
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN ASTRONOMIA
Esame di MECCANICA ANALITICA
SECONDA PROVA PARZIALE — 4 Giugno 2013

Parte A. Esercizi

1. Nel riferimento inerziale $Oxyz$ con l'asse z verticale ascendente, si consideri la superficie due-dimensionale (cilindro parabolico) di equazione

$$z = f(x, y) = \frac{a}{2}y^2, \quad a > 0.$$

Sulla superficie è vincolato in modo liscio un punto P di massa m . Oltre alla gravità, agisce sul punto una molla di costante h e lunghezza a riposo nulla tesa tra l'origine O e il punto P . Domande:

- a. determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità sulla base dei teoremi visti nel corso
- b. scrivere la lagrangiana del sistema e le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile
- c. Nell'ipotesi che *la molla sia assente*, scrivere la funzione Hamiltoniana associata e l'equazione di Hamilton-Jacobi
- d. Scrivere la trasformazione canonica associata e il moto a meno di quadrature. Scrivere formalmente la soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi

2. Dire per quale valore di a la trasformazione seguente è canonica di valenza unitaria

$$Q = f(q, p) = q^2 + aq\sqrt{q^2 + p}, \quad P = g(q, p) = q + \sqrt{q^2 + p}$$

Parte B. Domande sulla Teoria

Rispondere in modo esauriente alle domande seguenti

- 1 Principio variazionale di Hamilton
- 2 integrali primi, equilibri e stabilità per l'equazione di Eulero di un corpo rigido non soggetto a momenti

Esporre *uno a scelta* tra gli argomenti seguenti con dimostrazione

- 3 Definizione di trasformazione canonica e condizione sufficiente di canonicità per trasformazioni *indipendenti* dal tempo
- 4 Metodo di soluzione dell'equazione di Hamilton-jacobi per sistemi uno-dimensionali conservativi
- 5 Teorema di Poincaré

-
- Scrivere nome e cognome **in stampatello** su ogni foglio consegnato e indicare se vecchio ordinamento (V.O.) o nuovo (N.O.)
 - Consegnare solo la bella copia
-

SOLUZIONI

Parte A. Esercizi

Le forze agenti gravità e elastica sono conservative e rimangono tali se ristrette al vincolo. Abbiamo quindi

$$U = U^g + U^{el} = mgz_P + \frac{h}{2}OP^2 = mg\frac{a}{2}y^2 + \frac{h}{2}(x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4}y^4).$$

Gli equilibri sono gli zeri del gradiente di U

$$U_x = hx = 0, \quad U_y = y(h + mga + \frac{h}{2}a^2y^2)$$

e quindi l'unico equilibrio è l'origine $(0, 0)$. La stabilità si studia con la matrice hessiana, che è diagonale

$$H_U(0, 0) = \text{Diag}[h, h + mga]$$

Quindi l'equilibrio è stabile per THND o TLD. L'energia cinetica si trova imponendo che $\dot{z} = ay\dot{y}$ e quindi

$$T = \frac{m}{2}v_P^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + a^2y^2\dot{y}^2), \quad A(y) = \text{Diag}[m, m(1 + a^2y^2)].$$

Le frequenze di piccola oscillazione sono le soluzioni di

$$\det(H_U(0, 0) - \omega^2 A(0, 0)) = \det \text{Diag}[h - \omega^2 m, h + mga - \omega^2 m] = 0$$

pertanto

$$\omega_1^2 = \frac{h}{m}, \quad \omega_2^2 = ga + \frac{h}{m}.$$

La funzione hamiltoniana, data la lagrangiana quadratica nelle velocità, ha la forma

$$H = \frac{1}{2}A^{-1}p \cdot p + U = \frac{1}{2} \left(\frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m(1 + a^2y^2)} \right) + mg\frac{a}{2}y^2 + \frac{h}{2}(x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4}y^4).$$

Nel caso in cui la molla si assente, come richiesto, l'Hamiltoniana ha tutte le coordinate cicliche tranne una ed è anche separabile, nel caso in cui la molla sia presente, l'Hamiltoniana è solo separabile. Nel caso $h = 0$, la funzione generatrice si può scrivere, ponendo $P_y = E$

$$S(x, y, P_x, E) = -Et + xP_x + W(y, P_x, E)$$

mentre nel caso $h \neq 0$, scrivo l'hamiltoniana separabile nella forma

$$H(x, y, p_x, p_y) = f(H_x(x, p_x), H_y(y, p_y)) = H_x + H_y$$

e quindi la funzione generatrice associata

$$S(x, y, P_x, P_y) = -f(P_x, P_y)t + W_x(x, P_x) + W_y(y, P_y) = -(P_x + P_y)t + W_x(x, P_x) + W_y(y, P_y).$$

I passi successivi per arrivare alla scrittura della soluzione formale dell'equazione di Hamilton-Jacobi sono standard.

Esercizio 2. La condizione $J\mathbb{E}J^T = c\mathbb{E}$ nel caso unidimensionale e univalente si riduce a $\det J = 1$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 2q + a[\sqrt{q^2 + p} + \frac{q^2}{\sqrt{q^2 + p}}], \quad \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{aq}{2\sqrt{q^2 + p}}$$
$$\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{1}{2\sqrt{q^2 + p}}, \quad \frac{\partial g}{\partial q} = 1 + \frac{q}{\sqrt{q^2 + p}}.$$

Imponendo la condizione $\det J = 1$ si trova il valore $a = 2$.