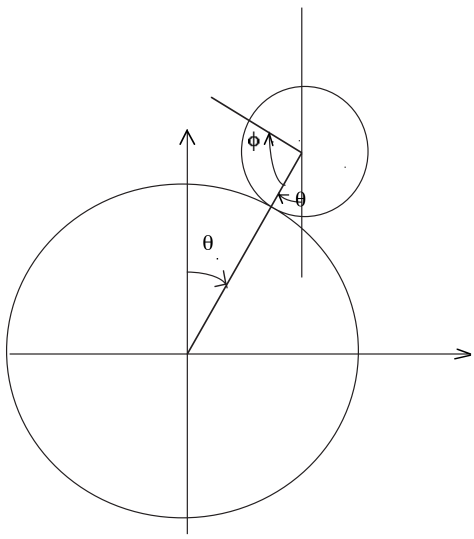
Primo compitino (esercizi **A.1** e **A.2**), 14 febbraio 2008

A.1 Sia data una guida circolare di raggio R centrata sull'origine del piano $O\,x_1\,x_2$ del sistema $O\,x_1\,x_2\,x_3$ di versori $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3$. Su di essa, esternamente, rotola senza strisciare un disco rigido di raggio $r < R$. Si introduca l'angolo θ orientato (osservato dal semispazio $x_3 > 0$) in senso orario *dal* semi-asse positivo $x_2 > 0$ *alla* semiretta per OG, dove G è il baricentro del disco. Dato un'evoluzione assegnata $t \mapsto \theta(t)$, determinare il vettore velocità angolare $\underline{\omega}(t)$ del disco.

Soluzione. Puro rotolamento: $R\theta = r\phi$



Un angolo tra una direzione invariante con il sistema esterno e una con il disco mobile è $\alpha := \theta + \phi$:

$$\underline{\omega} = -\dot{\alpha}\,\underline{\mathbf{c}}_3 = -\left(\frac{R}{r} + 1\right)\,\underline{\mathbf{c}}_3$$

A.2 Si consideri l'oscillatore armonico con viscosità

$$m\ddot{x} = -hx - k\dot{x} \qquad (*)$$

Discutere la stabilità dell'equilibrio con il *metodo spettrale* di Liapunov.

Soluzione. Pensata al primo ordine in $\mathbb{R}^2$, fatte le definizioni

$$z := \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{h}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix},$$

la $(*)$ è equivalente a

$$\dot{z} = Az, \quad \text{cioè :} \qquad \begin{cases} \dot{x} &= & v \\ \dot{v} &= & -\frac{h}{m}x - \frac{k}{m}v \end{cases}$$

Il metodo spettrale, almeno la parte vista a lezione prima del compitino, dice che se $Re\,Spec\,(A) < 0$ allora $z = 0$ è d'equilibrio asintoticamente stabile.

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0, \qquad m\lambda^2 + k\lambda + h = 0, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4mh}}{2m},$$

e dato che stiamo parlando di un "oscillatore armonico con viscosità" dobbiamo pensare:

$$m > 0, \quad h > 0, \quad k > 0. \tag{$**$}$$

La discussione sulla parte reale degli autovalori procede così:

• Se $\Delta := k^2 - 4mh > 0$: le due radici sono entrambe negative, tenendo conto naturalmente di $(**)$; l'eventuale dubbio può venire per $\lambda_+ = \frac{-k+\sqrt{k^2-4mh}}{2m}$, che si vede esser negativa perché $\sqrt{k^2 - 4mh} < k$ nell'ipotesi $\Delta > 0$.

• Se $\Delta = 0$: ancora ovviamente vero, $\lambda_\pm = -\frac{k}{2m} < 0$.

• Se $\Delta < 0$: ancora vero che $Re\,Spec\,(A) < 0$, infatti in tal caso $Re(\lambda_\pm) = -\frac{k}{2m} < 0$.