LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
PRIMO COMPITINO — 14 Febbraio 2008

A.1 Sia data una guida circolare di raggio R centrata sull'origine del piano $O\,x_1\,x_2$ del sistema $O\,x_1\,x_2\,x_3$ di versori $\underset{\sim}{c}_1, \underset{\sim}{c}_2, \underset{\sim}{c}_3$. Su di essa, esternamente, rotola senza strisciare un disco rigido di raggio $r < R$. Si introduca l'angolo θ orientato (osservato dal semispazio $x_3 > 0$) in senso orario *dal* semi-asse positivo $x_2 > 0$ *alla* semiretta per OG, dove G è il baricentro del disco. Dato un'evoluzione assegnata $t \mapsto \theta(t)$, determinare il vettore velocità angolare $\underset{\sim}{\omega}(t)$ del disco.

A.2 Si consideri l'oscillatore armonico con viscosità

$$m\ddot{x} = -hx - k\dot{x}$$

Discutere la stabilità dell'equilibrio con il *metodo spettrale* di Liapunov.

B.1 Disegnare qualitativamente le orbite nello spazio delle fasi del sistema meccanico 1-DIM dato da una particella di massa $m = 1$ vincolata senza attrito su di una retta x e soggetta ad una sola forza posizionale la cui energia potenziale (1-dimensionale) è

$$\mathcal{U}(x) = \frac{x^2}{1 + x^4}$$

B.2 Nel piano Oxy, con y asse verticale ascendente ($\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_2$), di un riferimento ortonormale $Oxyz$ giace una guida curvilinea *liscia* di equazione $y = x^3$. Sulla guida è libero di scorrere senza attrito un punto materiale P di massa m. Si usi l'ascissa x di P come coordinata lagrangiana del sistema, per cui $OP = \widetilde{OP}(x)$. Sul punto, oltre alla forza di gravità e alla reazione vincolare agisce una forza elastica dovuta ad una molla elastica lineare di costante elastica h tesa orizzontalmente tra il punto P e il corrispondente punto P' di eguale ordinata posto sull'asse y. Inoltre, il riferimento $Oxyz$ ruoti con velocità angolare costante $\omega = \omega\mathbf{e}_2$ rispetto ad uno spazio inerziale. Vogliamo studiare la dinamica del punto materiale nel riferimento *rotante*.
1. Scrivere l'energia cinetica del punto nel riferimento rotante. Dopo aver riconosciuto tutte le forze agenti, scrivere il Teorema delle forze vive e derivarne l'equazione del moto del punto P (per la coordinata x).
2. Determinare le configurazioni di equilibrio relativo del sistema. Usando i teoremi sulla stabilità visti nel corso, studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio al variare del parametro ω nei reali positivi.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella ripondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

SOLUZIONI

Esercizio A

1.

Esercizio B

1. La posizione del punto P è data da $OP(x) = x\mathbf{e}_1 + x^3\mathbf{e}_2$; la sua velocità è $v = \dot{OP} = \dot{x}\mathbf{e}_1 + 3x^2\dot{x}\mathbf{e}_2$, e l'energia cinetica vale

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(1 + 9x^4)\dot{x}^2.$$

Le forze agenti sono la gravità, la forza elastica, la reazione vincolare, la forza centrifuga e quella di Coriolis. La reazione vincolare ha componente lagrangiana nulla per definizione di vincolo liscio e la forza di Coriolis, ortogonale al piano Oxy, ha anch'essa componenti lagrangiane nulle. Le altre forze sono conservative, per cui il teorema delle forze vive si scrive

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt}, \qquad U = U^g + U^{el} + U^{cf}.$$

In dettaglio

$$U^g = mgx^3, \quad U^{el} = \frac{h}{2}x^2, \quad U^{cf} = -\frac{m\omega^2}{2}x^2$$

L'equazione del moto di P si ottiene dal teorema delle forze vive, dividendo ambo i membri per $\dot{x}$

$$m(1 + 9x^4)\ddot{x} + 18mx^3\dot{x}^2 + 3mgx^2 + (h - m\omega^2)x = 0.$$

2. Le configurazioni di equilibrio sono le soluzioni di $dU/dx = 0$, ovvero

$$x[3mgx - (m\omega^2 - h)] = 0, \quad i.e. \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{m\omega^2 - h}{3mg}$$

Poichè tutte le forze in gioco hanno componenti lagrangiane conservative, posso applicare THND, oltre che TLD. Abbiamo

$$H_U(x) = U''(x) = 6mgx + h - m\omega^2$$

e

$$U''(x_1) = h - m\omega^2, \qquad U''(x_2) = -(h - m\omega^2)$$

Pertanto, se $\omega^2 < h/m$, x_1 è stabile e x_2 instabile per THND; se $\omega^2 > h/m$, vale il viceversa sempre per THND, se $\omega^2 = h/m$, $U''(x_1) = U''(x_2) = 0$ e i teoremi visti nel corso non permettono di concludere nulla per la stabilità.