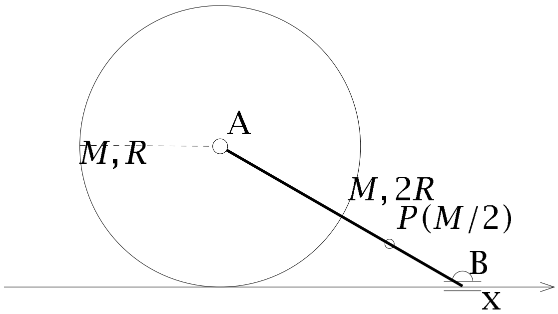
Secondo compitino (esercizio **A**), 12 marzo 2008

A Nel piano (O,x,y), y verticale ascendente ($\mathbf{g} = -g\,\hat{y}$, $g > 0$), un disco di massa M e raggio R rotola senza strisciare sull'asse x. Un'asta AB di massa M e lunghezza $2R$ ha l'estremo A incernierato sul centro del disco e l'altro estremo scorrevole senza attrito lungo l'asse x. Un anellino (assimilabile ad un p.to materiale) di massa $\frac{M}{2}$ scorre liberamente sull'asta. Si considerino quali coordinate Lagrangiane l'ascissa x del centro del disco e la distanza s di P da A. Determinare il moto del sistema, per dati iniziali: $x(0) = \dot{x}(0) = s(0) = \dot{s}(0) = 0$.



SOLUZIONE A: Si introduca un angolo ausiliario θ, per cui, dato il puro rotolamento, valga $x = R\theta$, inoltre,

$$OP = OA + AP = (x + s\frac{\sqrt{3}}{2}, R - \frac{s}{2}), \qquad \mathbf{v}_P = (\dot{s}\frac{\sqrt{3}}{2} + \dot{x}, -\frac{\dot{s}}{2})$$

L'energia cinetica è

$$T(x,s,\dot{x},\dot{s}) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}|\mathbf{v}_P|^2,$$

per cui la Lagrangiana del sistema è (en. pot.: $V = -\frac{Mgs}{4}$)

$$L = T - V = \frac{3}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}M\dot{s}^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}M\dot{x}\dot{s} + \frac{Mgs}{4}$$

Le equazioni di Lagrange sono:

$$x: \quad 3M\ddot{x} + \frac{\sqrt{3}}{4}M\ddot{s} = 0, \qquad\qquad s: \quad \frac{1}{2}M\ddot{s} + \frac{\sqrt{3}}{4}M\ddot{x} - \frac{Mg}{4} = 0$$

si ricava

$$\ddot{x} = -\frac{\sqrt{3}}{12}\ddot{s}, \qquad \frac{7}{16}\ddot{s} = \frac{g}{4}$$

$$\text{infine}: \qquad s(t) = \frac{2}{7}gt^2, \qquad x(t) = -\frac{\sqrt{3}}{42}gt^2$$