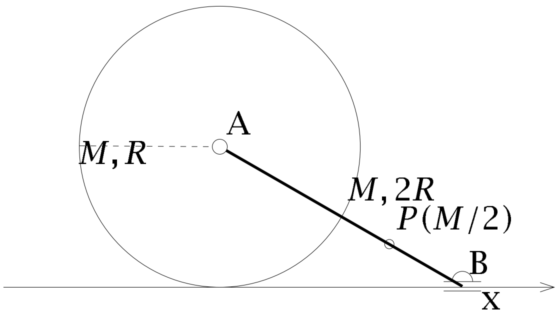
LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
SECONDO COMPITINO — 12 Marzo 2008

A Nel piano (O, x, y), y verticale ascendente ($\mathbf{g} = -g\,\hat{y}$, $g > 0$), un disco di massa M e raggio R rotola senza strisciare sull'asse x. Un'asta AB di massa M e lunghezza $2R$ ha l'estremo A incernierato sul centro del disco e l'altro estremo scorrevole senza attrito lungo l'asse x. Un anellino (assimilabile ad un p.to materiale) di massa $\frac{M}{2}$ scorre liberamente sull'asta. Si considerino quali coordinate Lagrangiane l'ascissa x del centro del disco e la distanza s di P da A. Determinare il moto del sistema, per dati iniziali: $x(0) = \dot{x}(0) = s(0) = \dot{s}(0) = 0$.



B Si consideri il moto piano di un punto materiale di massa m, riferito a coordinate polari (r, θ) con $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Il punto è soggetto a soggetto ad un'unica forza conservativa di potenziale $U(r) = -\frac{G}{r}$, $G > 0$. La lagrangiana del sistema è

$$L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = T - U = \frac{1}{2} m v_P^2 - U(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{G}{r}.$$

1. Determinare l'integrale primo corrispondente alla coordinata q supposta ciclica e, posto $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = C$, ricavare per inversione $\hat{\dot{q}}$ in funzione di C ed, eventualmente, delle altre coordinate e velocità.

2. Scrivere la funzione di Routh

$$R(r, \dot{r}) = L(r, \dot{r}, \hat{\dot{\theta}}) - C\hat{\dot{\theta}}$$

e riconoscere che R è della forma $R(r, \dot{r}) = \mathcal{T}(\dot{r}) - \mathcal{U}(r)$.

3. Determinare le configurazioni di equilibrio del potenziale $\mathcal{U}(r)$, l'eventuale stabilità e frequenza di piccola oscillazione.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella ripondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

SOLUZIONI

Esercizio A

Si introduca un angolo ausiliario θ, per cui, dato il puro rotolamento, valga $x = R\theta$, inoltre,

$$OP = OA + AP = (x + s\frac{\sqrt{3}}{2}, R - \frac{s}{2}), \qquad \mathbf{v}_P = (\dot{s}\frac{\sqrt{3}}{2} + \dot{x}, -\frac{\dot{s}}{2})$$

L'energia cinetica è

$$T(x, s, \dot{x}, \dot{s}) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}|\mathbf{v}_P|^2,$$

per cui la Lagrangiana del sistema è (en. pot.: $V = -\frac{Mgs}{4}$)

$$L = T - V = \frac{3}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}M\dot{s}^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}M\dot{x}\dot{s} + \frac{Mgs}{4}$$

Le equazioni di Lagrange sono:

$$x: \quad 3M\ddot{x} + \frac{\sqrt{3}}{4}M\ddot{s} = 0, \qquad\qquad s: \quad \frac{1}{2}M\ddot{s} + \frac{\sqrt{3}}{4}M\ddot{x} + \frac{Mg}{4} = 0$$

si ricava

$$\ddot{x} = -\frac{\sqrt{3}}{12}\ddot{s}, \qquad \frac{7}{16}\ddot{s} = \frac{g}{4}$$

$$\text{infine}: \qquad s(t) = \frac{2}{7}gt^2, \qquad x(t) = -\frac{\sqrt{3}}{42}gt^2$$

Esercizio B

SI riconosce che la Lagrangiana è quella del problema dei due corpi. L'integrale primo di ciclicità corrisponde alla conservazione del momento angolare e vale $mr^2\dot{\theta} = C$. La funzione di Routh descrive l'evoluzione della coordinata radiale. Si ha immediatamente, seguendo le indicazioni del testo

$$R(r, \dot{r}) = \mathcal{T}(\dot{r}) - \mathcal{U}(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{G}{r} - \frac{C^2}{2mr^2}.$$

Per l'equilibrio

$$\mathcal{U}'(r) = -\frac{1}{r^2}(\frac{C^2}{mr} - G) = 0 \qquad i.e. \quad r^* = \frac{C^2}{mG}.$$

Per la stabilità

$$\mathcal{U}'(r^*) = (\frac{1}{r^*})^3 G > 0, \qquad stabile.$$

Per la frequenza di piccola oscillazione

$$\det(H_U - \omega^2 A) = 0, \quad i.e. \quad (\frac{1}{r^*})^3 G = \omega^2 m \quad i.e. \quad \frac{1}{T^2} = \frac{G}{m}\frac{1}{(r^*)^3}$$

che è la terza legge di Keplero.