LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
PRIMO APPELLO — 19 Marzo 2008

A.1 Dato il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x} = -x - y + x^2, \qquad \dot{y} = x - y - xy$$

stabilire se la funzione $W(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ è una funzione di Liapunov per la stabilità dell'origine. E per la stabilità asintotica?

A.2 Si consideri un punto materiale di massa m vincolato in modo liscio all'asse x di un riferimento ortonormale e soggetto alla sola forza posizionale (due casi)

$$a) \quad F(x) = 2xe^{-x^2}, \qquad b) \quad F(x) = -2xe^{-x^2}.$$

1. Nel caso a), scrivere la lagrangiana del sistema, le equazioni di Lagrange, la loro riduzione al primo ordine e le equazioni linearizzate attorno all'unico equilibrio.
2. Accertare, ove possibile, la stabilità o l'instabilità dell'equilibrio nei due casi in cui la forza agente sia descritta da a) o b) usando, a scelta, i metodi visti nel corso. E' utile tracciare un grafico del potenziale della forza determinato al punto 1.

B Un punto P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito sul toro di equazioni parametriche

$$x = (R + r\cos\theta)\cos\phi, \quad y = (R + r\cos\theta)\sin\phi, \quad z = r\sin\theta, \quad r < R$$

L'asse x è verticale discendente, cioè $\underline{\mathbf{g}} = g\,\hat{\mathbf{x}},\ g > 0$.

(i) Dopo aver verificato l'esistenza di punto di equilibrio stabile, determinare le frequenze di piccola oscillazione attorno ad esso.

Successivamente,

(ii) posto $g = 0$, dire quanti integrali primi ha il sistema e determinarli esplicitamente; calcolare la componente lungo $\hat{\mathbf{z}}$ del 'momento della quantità di moto' rispetto all'origine O e discutere l'eventuale relazione che essa ha con gli integrali primi determinati.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella ripondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

SOLUZIONI

Esercizio A

A.1. La funzione W è banalmente definita positiva in un intorno dell'origine e ivi nulla. Calcoliamo la derivata di Lie

$$L_X W(x,y) = x(-x-y+x^2) + y(x-y-xy) = -x^2(1-x) - y^2(1+x).$$

Si vede che se consideriamo la palla di $\mathbb{R}^2$ $B(0,\varepsilon)$, in essa $1-x>0$ e $1+x>0$, pertanto la funzione W è funzione di Liapunov per la stabilità semplice e anche asintotica.

A.2 L'energia potenziale associata alla forza F è

$$a) \quad U(x) = e^{-x^2}, \qquad b) \quad U(x) = -e^{-x^2}$$

La Lagrangiana è del tipo meccanico

$$L(x,\dot{x}) = T(\dot{x}) - U(x) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - e^{-x^2}$$

L' equazione di Lagrange associata è

$$m\ddot{x} = F(x) = 2xe^{-x^2}$$

L'unico equilibrio è l'origine. Le equazioni ridotte al primo ordine e linearizzate attorno all'equilibrio $(0,0)$ sono

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = \frac{1}{m}F'(0)x = -\frac{1}{m}U''(0)x$$

Studio della stabilità o instabilità.

Caso a). Si vede che $U''(0) = -2$. Quindi $x=0$ è un massimo e l'equilibrio è instabile per THND (sole forze conservative). In alternativa, usando il metodo spettrale, l'equazione agli autovalori per il sistema linearizzato è

$$\det(a-\lambda I) = 0 \qquad i.e. \quad \lambda^2 + U''(0) = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}$$

e quindi si ha instabilità.

Caso b). Il potenziale ora ha un minimo nell'origine e quindi l'equilibrio è stabile per THND o TLD. Si puo' anche usare l'energia $E = T+U$, integrale primo, come funzione di Liapunov per la stabilità semplice.

Esercizio B