Esercizio B della prova del 19 marzo 2008.

B Un punto P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito sul toro di equazioni parametriche

$$x = (R + r\cos\theta)\cos\phi, \quad y = (R + r\cos\theta)\sin\phi, \quad z = r\sin\theta, \quad r < R$$

L'asse x è verticale discendente, cioè $\underline{\mathbf{g}} = g\,\hat{\mathbf{x}},\ g > 0$.

(i) Dopo aver verificato l'esistenza di un punto di equilibrio stabile, determinare le frequenze di piccola oscillazione attorno ad esso.

Successivamente,

(ii) posto $g = 0$, dire quanti integrali primi ha il sistema e determinarli esplicitamente; calcolare la componente lungo $\hat{\mathbf{z}}$ del 'momento della quantità di moto' rispetto all'origine O e discutere l'eventuale relazione che essa ha con gli integrali primi determinati.

Soluzione:

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{x} &= -r\sin\theta\,\dot{\theta}\,\cos\phi - (R + r\cos\theta)\sin\phi\,\dot{\phi} \\ \dot{y} &= -r\sin\theta\,\dot{\theta}\,\sin\phi + (R + r\cos\theta)\cos\phi\,\dot{\phi} \\ \dot{z} &= r\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

L'energia cinetica è

$$T(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\theta}^2 + (R + r\cos\theta)^2\,\dot{\phi}^2\right)$$

$$\mathcal{U}(\theta, \phi) = -mgx = -mg(R + r\cos\theta)\cos\phi$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\theta &= mgr\sin\theta\cos\phi \\ \mathcal{U}_\phi &= mg(R + r\cos\theta)\sin\phi \end{aligned}$$

Il candidato equilibrio (stabile) è $(\theta, \phi) = (0, 0)$,

$$\nabla^2\mathcal{U}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{\theta\theta} = mgr\cos\theta\cos\phi & \mathcal{U}_{\theta\phi} = -mgr\sin\theta\sin\phi \\ \mathcal{U}_{\phi\theta} = -mgr\sin\theta\sin\phi & \mathcal{U}_{\phi\phi} = mg(R + r\cos\theta)\cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2\mathcal{U}(0, 0) = \begin{pmatrix} mgr & 0 \\ 0 & mg(R + r) \end{pmatrix} \qquad \text{è def. positiva: stabilità}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} mgr & 0 \\ 0 & mg(R + r) \end{pmatrix} - \omega^2\begin{pmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & m(R + r)^2 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{r}, \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{R + r}.$$

Posto ora $g = 0$,

$$T = L = E : \text{ integrale primo di Jacobi: è l'energia del sistema}$$

Un altro integrale primo è quello di ciclicità per ϕ:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{I} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m(R + r\cos\theta)^2 \dot{\phi}$$

Il conto diretto mostra che $OP \wedge m\dot{OP} \cdot \hat{\mathbf{z}} =$

$$= \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ (R + r\cos\theta)\cos\phi & (R + r\cos\theta)\sin\phi & r\sin\theta \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{pmatrix} \cdot \hat{\mathbf{z}} =$$

$$= m(R + r\cos\theta)\cos\phi \left(-r\sin\theta\,\dot{\theta}\,\sin\phi + (R + r\cos\theta)\cos\phi\,\dot{\phi}\right) -$$

$$-m(R + r\cos\theta)\sin\phi \left(-r\sin\theta\,\dot{\theta}\,\cos\phi - (R + r\cos\theta)\sin\phi\,\dot{\phi}\right) =$$

$$= m(R + r\cos\theta)^2 \dot{\phi} = \mathcal{I}.$$