

Esercizio A della prova dell'1 aprile 2008.

A₁ Un circuito elettrico è composto da una pila che fornisce una differenza di potenziale costante $V > 0$, una resistenza $R > 0$, e da un'induttanza (un avvolgimento a spirale) $L > 0$. L'elettromagnetismo classico ci dice che la funzione nel tempo della corrente elettrica $I = I(t)$ deve soddisfare all'equazione differenziale:

$$V = R I(t) + L \frac{dI}{dt}(t)$$

(i) Studiare il generico problema di Cauchy per tale sistema, (ii) dire se esiste un equilibrio e se è stabile (asintoticamente?)

A₂ Il precedente avvolgimento a spirale di induttanza $L > 0$ è costruito attorno ad un asse verticale discendente x , $\mathbf{g} = g \hat{\mathbf{x}}$, $g > 0$, nella regione delle x negative immediatamente a ridosso dello zero. Essa funge da elettromagnete per una particella metallica P di massa $m > 0$ vincolata senza attrito sull'asse $x > 0$, cioè, su P agisce, oltre alla gravità, la forza

$$\mathbf{F} = -K \frac{I^2}{x^2} \hat{\mathbf{x}}, \quad K > 0.$$

Studiare il sistema dinamico complessivo (corrente + moto di P), pensato al primo ordine nelle seguenti variabili:

- x : posizione di P ,
- v : velocità di P ,
- I : corrente elettrica,

$$z := \begin{pmatrix} x \\ v \\ I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(i) Determinare un equilibrio z^* , scrivere la matrice A del sistema linearizzato; (ii) poi, poste *tutte* le costanti uguali ad 1, studiarne la stabilità. (Suggerimento: il sistema è del tipo: $\dot{z} = A(z - z^*) + \mathcal{R}_2(z)$).

SOLUZIONE

A₁ $\dot{I} = -\frac{R}{L}I + \frac{V}{L}$, l'integrale generale è la somma dell'integrale generale dell'omogenea sommato ad una soluzione particolare: $I(t, c_1) = c_1 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}$, $\tilde{I}(t, I_0) = (I_0 - \frac{V}{R}) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V}{R}$; l'equilibrio (unico) è $I^* = \frac{V}{R}$ e, vista la struttura delle soluzioni (da qualunque valore iniziale I_0 si parta si giunge asintoticamente ed esponenzialmente a $I^* = \frac{V}{R}$) è asintoticamente stabile. Formalmente, si poteva anche usare il primo metodo, osservando che la "matrice

jacobiana" del campo vettoriale (1-dim.) valutata all'equilibrio è $-\frac{R}{L}$, che è < 0 , dunque asint. stabile.

A₂

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ g - \frac{K}{m} \frac{I^2}{x^2} \\ -\frac{R}{L} I + \frac{V}{L} \end{pmatrix}$$

Equilibrio:

$$z^* = \begin{pmatrix} x^* \\ v^* \\ I^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{K}{mg}} \frac{V}{R} \\ 0 \\ \frac{V}{R} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2R}{V} \sqrt{\frac{mg^3}{K}} & 0 & -\frac{2gR}{V} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = -(1 + \lambda)(\lambda^2 - 2)$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$$

l'equilibrio è instabile: esiste una radice (autovalore con parte reale strettamente) positiva.