LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
PRIMO APPELLO — 1 Aprile 2008

$\mathbf{A_1}$ Un circuito elettrico è composto da una pila che fornisce una differenza di potenziale costante $V > 0$, una resistenza $R > 0$, e da un'induttanza (un avvolgimento a spirale) $L > 0$. L'elettromagnetismo classico ci dice che la funzione nel tempo della corrente elettrica $I = I(t)$ deve soddisfare all'equazione differenziale:

$$V = R\,I(t) + L\frac{dI}{dt}(t)$$

(i) Studiare il generico problema di Cauchy per tale sistema, (ii) dire se esiste un equilibrio e se è stabile (asintoticamente?)

$\mathbf{A_2}$ Il precedente avvolgimento a spirale di induttanza $L > 0$ è costruito attorno ad un asse verticale discendente x, $\mathbf{g} = g\,\hat{\mathbf{x}}$, $g > 0$, nella regione delle x negative immediatamente a ridosso dello zero. Essa funge da elettromagnete per una particella metallica P di massa $m > 0$ vincolata senza attrito sull'asse $x > 0$, cioè, su P agisce, oltre alla gravità, la forza

$$\mathbf{F} = -K\,\frac{I^2}{x^2}\,\hat{\mathbf{x}}, \qquad K > 0.$$

Studiare il sistema dinamico complessivo (corrente + moto di P), pensato al primo ordine nelle seguenti variabili:

x: posizione di P,
v: velocità di P,
I: corrente elettrica,

$$z := \begin{pmatrix} x \\ v \\ I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(i) Determinare un equilibrio z^*, scrivere la matrice A del sistema linearizzato; (ii) poi, poste *tutte* le costanti uguali ad 1, studiarne la stabilità. (Suggerimento: il sistema è del tipo: $\dot{z} = A(z - z^*) + \mathcal{R}_2(z)$).

B Nel piano Oxy, con y verticale ascendente, di un riferimento inerziale $Oxyz$ si consideri il sistema costituito da un'asta omogenea BC di massa m e lunghezza $2l$. Tra l'estremo B dell'asta e il punto $A = (0, 2l + R)$ è tesa una molla di costante elastica $h > 0$ e lunghezza a riposo nulla. L'estremo C dell'asta è vincolato invece in modo liscio al centro C di un disco di raggio R e massa trascurabile, che rotola sull'asse x. Come coordinate lagrangiane si usino l'ascissa $x = x_C$ del punto C e l'angolo θ tra la direzione negativa dell'asse x e il segmento BC, valutato in senso orario.

1. Determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
2. Scrivere l'energia cinetica del sistema e determinare, *a meno della risoluzione di un'equazione di secondo grado*, le frequenze di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile nell'ipotesi $mg = h2l$.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*

SOLUZIONI

Esercizio B

Calcolo dell'energia potenziale gravitazionale ed elastica $U = U^g + U^{el} = mgy_G + \frac{h}{2}|AB|^2$:

$$U(x, \theta) = mgl\sin\theta + \frac{h}{2}[(x - 2l\cos\theta)^2 + 4l^2(\sin\theta - 1)^2].$$

Gli equilibri sono gli zeri del gradiente di U, quindi le soluzioni di

$$U_x = h(x - 2l\cos\theta) = 0,$$

$$U_\theta = mgl\cos\theta + h(x - 2l\cos\theta)2l\sin\theta + 4hl^2(\sin\theta - 1)\cos\theta = 0$$

Sostituendo la prima nella seconda equazione si arriva a discutere l'equazione in θ

$$\cos\theta[mgl - 4hl^2 + 4hl^2\sin\theta] = 0$$

che ha soluzioni $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $\theta_{3,4} = \arcsin(1 - \frac{mg}{4hl})$, queste ultime esistenti sse

$$-1 \le 1 - \frac{mg}{4hl} \le 1, \qquad i.e. 0 \le \frac{mg}{8hl} \le 1.$$

Calcoliamo la matrice Hessiana per discutere la stabilità

$$H_U(x, \theta) = \begin{pmatrix} h & 2hl\sin\theta \\ 2hl\sin\theta & \tilde{f}(x, \theta) \end{pmatrix}$$

ove

$$\tilde{f}(x, \theta) = -mgl\sin\theta + 2hlx\cos\theta + 4hl^2\sin\theta$$

che, calcolata negli equilibri ove $x = 2l\cos\theta$ si riduce a

$$f(\theta_i) = -mgl\sin\theta_i + 4hl^2\cos^2\theta_i + 4hl^2\sin\theta_i$$

e l'Hessiana diventa funzione della sola θ. Calcoliamo il determinante.

$$\det H_U(\theta_1) = \det H_U(\frac{\pi}{2}) = h(4hl^2 - mgl) - 4h^2l^2 = -mghl \quad \text{instabile per THND;}$$

$$\det H_U(\theta_2) = \det H_U(-\frac{\pi}{2}) = -h(4hl^2 - mgl) - 4h^2l^2 = mghl - 8h^2l^2$$

che è instabile per THND sse $\frac{mg}{8hl} < 1$; se $\frac{mg}{8hl} = 1$ non possiamo dire nulla, se $\frac{mg}{8hl} > 1$ l'equilibrio è stabile per THND o TLD. Per $\theta_{3,4}$ riscriviamo $f(\theta)$ come

$$f(\theta_{3,4}) = -mgl\sin\theta_{3,4} + 4hl^2(1 - \sin^2\theta_{3,4}) + 4hl^2\sin\theta_{3,4} = 4hl^2$$

pertanto

$$\det H_U(\theta_{3,4}) = 4h^2l^2 - 4h^2l^2\sin^2\theta_{3,4} \ge 0.$$

Quindi le soluzioni sono stabili quando $\theta_{3,4} \ne \theta_{1,2}$.

Piccole oscillazioni nel caso $mg = 2hl$. In tal caso gli unici equilibri stabili sono $\theta_3 = \frac{\pi}{6}$ e $\theta_4 = \frac{5\pi}{6}$. Calcoliamo l'energia cinetica

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \frac{4}{3}\dot{\theta}^2 + 2l\sin\theta\ \dot{x}\dot{\theta}] + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}.$$

La matrice dell'energia cinetica è

$$A = \begin{pmatrix} m & ml\sin\theta \\ ml\sin\theta & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & \frac{1}{2}ml \\ \frac{1}{2}ml & m \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana è

$$H_U(\frac{\pi}{6}) = \begin{pmatrix} h & hl \\ hl & 4hl^2 \end{pmatrix}.$$