LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
APPELLO DEL 29 Settembre 2008

A In un sistema inerziale $Oxyz$ una particella P di massa $m > 0$ ($\mathbf{OP} = (x, y, z)$, $\dot{\mathbf{OP}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$) è soggetta alla sola forza attiva

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(\mathbf{OP}, \dot{\mathbf{OP}}) \mapsto \left(a \tan(x) - \sin(x + y) - (1 + x^3)\dot{x}, -2y - 3y^3, z^2\dot{x}\right),$$

con $a \in \mathbb{R}$.

1. Si vincoli la particella P in maniera liscia sulla guida 1-dimensionale coincidente con l'asse delle x. Per tale sistema vincolato, si studi la stabilità dell'equilibrio $x = 0$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ usando il primo metodo di Lyapunov (metodo spettrale).

2. Si vincoli ora la particella P in maniera liscia sulla guida 1-dimensionale coincidente con l'asse delle y. Per tale sistema vincolato, si riduca il sistema al primo ordine e si stabilisca se la funzione
$$W(y, \dot{y}) = \frac{1}{m}y^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2$$
è una funzione di Lyapunov per la stabilità semplice dell'origine. E per la stabilità asintotica?

B Nel piano verticale Oxy del sistema inerziale $Oxyz$, y verticale ascendente $\underline{\mathbf{g}} = -g\,\hat{\mathbf{y}}$, $g > 0$, si consideri il sistema costituito da un anello di massa M vincolato in modo liscio per un suo punto O nell'origine degli assi, e da un punto materiale P di massa m che scorre senza attrito sull'anello. Si riferisca il sistema agli angoli θ, angolo tra la direzione negativa dell'asse delle y e il segmento OC (C centro dell'anello), e ϕ, angolo tra la direzione negativa dell'asse delle y e il segmento CP. Entrambi gli angoli sono valutati positivamente in senso antiorario.

1. Determinare l'energia potenziale del sistema, le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

2. Scrivere l'energia cinetica del sistema e determinare le frequenze di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella copia. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*

SOLUZIONI

Esercizio B

Energia potenziale

$$U = U^g = -gR[(M+m)\cos\theta + m\cos\phi]$$

Gli equilibri si ottengono annullando il gradiente di U,

$$\nabla U = (U_\theta, U_\phi)^T = (gR(M+m)\sin\theta, mgR\sin\phi)^T$$

e sono quindi i punti $(0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi)$.

Calcolando la matrice Hessiana, sempre non degenere, il THND mostra subito che $(0,0)$ è stabile, mentre gli altri sono instabili. L'Hessiano di U nell'equilibrio stabile è

$$H_U(0,0) = Diag[gR(M+m), mgR].$$

Energia cinetica. Vale, per la formula dell'energia cinetica di un corpo rigido con punto fisso,

$$T = T^{anello} + T^{punto} = \frac{1}{2}m\dot{v}_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 + \frac{m}{2}v_P^2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{m}{2}v_P^2$$

ove $v_P = (\dot{x}_P, \dot{y}_P)$ e $I_O = I_C + MR^2 = 2MR^2$ (T. di Steiner). Svolgendo il conto, avendo calcolato che

$$x_P = R(\cos\theta + \cos\phi), \quad y_P = -R(\sin\theta + \sin\phi),$$

si trova, $q = (\theta, \phi)^T$,

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^t A\dot{q}, \qquad A(\theta,\phi) = R^2 \begin{pmatrix} 2M+m, & m\cos(\theta-\phi) \\ m\cos(\theta-\phi), & m \end{pmatrix}.$$

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni dell'equazione

$$\det(H_U(0,0) - \omega^2 A(0,0)) = \det[Rg \begin{pmatrix} M+m, 0 \\ 0, \ m \end{pmatrix} - \omega^2 R^2 \begin{pmatrix} 2M+m, & m \\ m, & m \end{pmatrix}] = 0.$$

Rispettivamente

$$\omega_1^2 = \frac{g}{R}\frac{M+m}{m}, \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{2R}.$$