ESERCIZIO A In un sistema inerziale $Oxyz$ una particella P di massa $m > 0$ ($\mathbf{OP} = (x, y, z)$, $\dot{\mathbf{OP}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$) è soggetta alla sola forza attiva

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(\mathbf{OP}, \dot{\mathbf{OP}}) \mapsto \left(a \tan(x) - \sin(x + y) - (1 + x^3)\dot{x}, -2y - 3y^3, z^2\dot{x}\right),$$

con $a \in \mathbb{R}$.

1. Si vincoli la particella P in maniera liscia sulla guida 1-dimensionale coincidente con l'asse delle x. Per tale sistema vincolato, si studi la stabilità dell'equilibrio $x = 0$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ usando il primo metodo di Liapunov (metodo spettrale).

2. Si vincoli ora la particella P in maniera liscia sulla guida 1-dimensionale coincidente con l'asse delle y. Per tale sistema vincolato, si riduca il sistema al primo ordine e si stabilisca se la funzione

$$W(y, \dot{y}) = \frac{1}{m}y^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2$$

è una funzione di Liapunov per la stabilità semplice dell'origine. E per la stabilità asintotica?

SOLUZIONE

1. Con vincolo l'asse delle x, si ottiene

$$m\ddot{x} = a \tan(x) - \sin(x) - (1 + x^3)\dot{x}.$$

Il sistema ridotto al primo ordine è

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m}[a \tan(x) - \sin(x) - (1 + x^3)v] \end{cases}$$

mentre il sistema linearizzato attorno all'equilibrio $(0, 0)$ è

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{a-1}{m}x - \frac{1}{m}v \end{cases}$$

Quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a-1}{m} & -\frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

e gli autovalori sono le soluzioni di $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$. Si ottiene

$$m\lambda^2 + \lambda - (a - 1) = 0,$$

ovvero $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4m(a-1)}}{2m}$. Conseguentemente:

- per $a < 1$ gli autovalori hanno parte reale negativa: l'equilibrio è asintoticamente stabile,
- per $a = 1$ un autovalore è 0: il metodo spettrale non dice nulla,
- per $a > 1$ un autovalore ha parte reale positiva: l'equilibrio è instabile.

2. Con vincolo l'asse delle y, si ottiene

$$m\ddot{y} = -2y - 3y^3.$$

Il sistema ridotto al primo ordine è

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m}[-2y - 3y^3] \end{cases}$$

e si vede che

$$\dot{W} = 2\frac{y}{m}v + v\frac{1}{m}[-2y - 3y^3] = -\frac{3vy^3}{m}$$

non ha il comportamento (≤ 0) aspettato attorno all'equilibrio.

(Osservazione (non richiesta): il sistema linearizzato attorno all'equilibrio $(0,0)$ *è (un oscillatore armonico)*

$$\begin{cases} \dot{y} = v \\ \dot{v} = -\frac{2}{m}y \end{cases}$$

Riconsiderando allora la funzione di Liapunov proposta:

$$W(y,v) = \frac{1}{m}y^2 + \frac{1}{2}v^2$$

si nota che ha un minimo stretto in $(0,0)$*, inoltre, in tal caso,* $\dot{W} \equiv 0$*. Essa è quindi funzione di Liapunov per la stabilità semplice di* $(0,0)$ *per il sistema linearizzato, proprietà però che non si propaga –a meno di ulteriori indagini– sul sistema originale non lineare; si ricordi che gli autovalori dell'oscill. arm. sono puramente immaginari).*