LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
APPELLO DEL 2 Settembre 2008

A Si consideri l'equazione differenziale in $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + 2xy \\ \\ \dot{y} &= x - x^2 \end{cases}$$

(1) Determinarne tutti gli equilibri e discuterne l'eventuale stabilità mediante il metodo spettrale (o primo metodo di Liapunov).

(2) Considerata la funzione reale

$$W(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{8}\ln(1 + 2x)\,,$$

dimostrare o confutare che, a meno di costante additiva, W è una funzione di Liapunov per almeno uno dei punti d'equilibrio del sistema dinamico in studio.

B Nel piano verticale Oxy del sistema inerziale $Oxyz$, y verticale ascendente $\underline{\mathbf{g}} = -g\,\hat{\mathbf{y}},\ g > 0$, si consideri il sistema costituito da una lamina ABC a forma di triangolo rettangolo isoscele, di lato l e angolo alla base $\frac{\pi}{4}$, di massa m, vincolata a scorrere senza attrito sull'asse orizzontale x con il lato AB e da un disco omogeneo di massa m e raggio R che rotola senza strisciare sulla base BC della lamina triangolare. Il vertice A della lamina è collegato all'origine da una molla elastica di costante elastica $h > 0$ e lunghezza a riposo nulla mentre il baricentro G del disco è collegato al vertice C della lamina da una molla elastica di costante elastica $h > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Si riferisca il sistema alle coordinate $x = x_A$, ascissa del vertice A della lamina e $s = s_K$ ascissa del punto di contatto disco–lamina rispetto ad una ascissa orientata positivamente nella direzione CB avente origine $s = 0$ nel vertice C.

1. Determinare l'energia potenziale del sistema, le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.
2. Scrivere l'energia cinetica del sistema e le equazioni di Lagrange del sistema.
3. Determinare le frequenze di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile (è sufficiente scrivere l'equazione $p(\omega^2) = 0$ evidenziando i coefficienti delle potenze).

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*

SOLUZIONI

Esercizio B

Equilibri:

$$\begin{cases} 0 &= (1+2x)y \\ 0 &= (1-x)x \end{cases} \qquad (x_E, y_E): \quad (0,0), \quad (1,0).$$

Usando notazioni standard,

$$\underline{\mathbf{x}} := (x,y), \qquad \dot{\underline{\mathbf{x}}} = X(\underline{\mathbf{x}})$$

$$\nabla X(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 1+2x \\ 1-2x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla X(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1 \ : \text{ instabile}$$

$$\nabla X(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3} \ : \text{ non decidibile con il primo metodo.}$$

Per quanto riguarda W,

$$\nabla W(x,y) = \left(-\frac{3}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\frac{2}{1+2x}, y \right), \qquad \nabla W(1,0) = 0,$$

$$\nabla W2(x,y)\big|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \text{definita positiva} \quad \Rightarrow$$

W ha un minimo stretto locale in $(0,1)$, inoltre:

$$\dot{W} = L_X W(x,y) = \nabla W(x,y) \cdot X(x,y) =$$

$$= \left(-\frac{3}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\frac{2}{1+2x}, y \right) \cdot (y + 2xy, x - x2) = 0 : \quad W \text{ è un integrale primo,}$$

Infine: $W(x,y) - W(1,0)$ è una funzione di Liapunov per la (semplice) stabilità di $(1,0)$.

Esercizio B

Energia potenziale

$$U = U^{el} + mgy_k + cost = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + R^2) + mg(l - s\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

L'unico equilibrio si ottiene annullando il gradiente di U ed è $(x^*, s^*) = (0, \frac{mg\sqrt{2}}{h2})$. L'hessiano di U nell'equilibrio è $H_U = Diag[h,h] > 0$, quindi è stabile per THND.

Energia cinetica. Per il puro rotolamento, $\omega = \frac{\dot{s}}{R}$, mentre $I_G^z = \frac{mR^2}{2}$. Vale

$$T = T^{lam} + T^{disco} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{m}{2}v_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

con $v_G = (\dot{x}_k, \dot{y}_k) = (\dot{x} + \dot{s}\frac{\sqrt{2}}{2}, -\dot{s}\frac{\sqrt{2}}{2})$. Svolgendo il conto, posto $q = (x,s)$, si trova

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^t A \dot{q}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2m, m\frac{\sqrt{2}}{2} \\ m\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}m \end{pmatrix}.$$

Equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 2m\ddot{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}m\ddot{s} + hx = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = 2m\ddot{s} + \frac{\sqrt{2}}{2}m\ddot{x} + hs - mg\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni dell'equazione

$$\det(H_U - \omega^2 A) = 0.$$