LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
APPELLO DEL 7 Luglio 2008

A Nel piano Oxy, con y verticale ascendente, di un riferimento inerziale $Oxyz$, si consideri il sistema soggetto a gravità costituito da due aste omogenee di massa m e lunghezza l. L'asta AB ha l'estremo A vincolato in modo liscio nell'origine, mentre l'asta CD ha il suo punto medio vincolato in modo liscio nell'estremo libero B. Tra gli estremi A e D delle due aste è tesa una molla di costante elastica h e lunghezza a riposo nulla. Si riferisca il sistema all'angolo θ tra la direzione negativa dell'asse delle y e il segmento AB, valutato in senso antiorario, e all'angolo ϕ tra il segmento AB e il segmento CD.

1. Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità o instabilità per mezzo dei teoremi visti nel corso giustificando tutti i risultati.

2. Si supponga ora che per mezzo di un ulteriore vincolo liscio si abbia $\phi \equiv \frac{\pi}{2}$ e che nel punto B agisca una forza di attrito viscoso $F^B = -kv_B$. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema 1–dimensionale risultante e studiarne la stabilità o instabilità per mezzo dei teoremi visti nel corso giustificando tutti i risultati.

(Suggerimento: per studiare l'instabilità puo' essere utile ricavare l'equazione del moto a partire dalla Lagrangiana del sistema. Per scrivere l'energia cinetica, pensare al sistema come ad un corpo rigido con un punto fisso e indicare con I_A (senza necessariamente calcolarlo) il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse z passante per A).

B Nel piano verticale Oxy del sistema inerziale $Oxyz$, y verticale ascendente $\underline{\mathbf{g}} = -g\,\hat{\mathbf{y}},\ g > 0$, un disco omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare sull'asse x. Un'asta di massa trascurabile e di lunghezza l è incernierata senza attrito per un suo estremo nel baricentro G del disco. Sull'altro suo estremo è solidale un punto materiale P di massa m. Sia x l'ascissa di G, inoltre, sia ϑ l'angolo (valutato in senso anti-orario nel semi-spazio $z > 0$) dalla semiretta parallela a y e orientata come $-\hat{\mathbf{y}}$ passante per G alla semiretta per GP.

Scrivere la Lagrangiana del sistema, individuare una ciclicità, determinare l'integrale primo associato e, per scelte di valori iniziali per cui tale integrale primo valga zero, $c = 0$, studiare il sistema 1-DIM ridotto col metodo di Routh; individuarne un equilibrio stabile e determinarne la frequenza di piccola oscillazione.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*

SOLUZIONI

Esercizio A

1. Il sistema è soggetto a sole forze conservative. Le configurazioni di equilibrio sono i punti critici dell'energia potenziale $U(\theta, \phi) = U^g(\theta) + U^{el}(\phi)$ e la loro stabilità o instabilità si puo' accertare con THND. Si ha

$$U(\theta, \phi) = -mg\frac{3}{2}l\cos\theta - \frac{h}{2}l^2\cos\phi$$

Gli equilibri sono le soluzioni di

$$\sin\theta = 0, \quad \sin\phi = 0.$$

La matrice Hessiana è

$$H_U = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Quindi, applicando THND, l'unica soluzione stabile è $P = (0, 0)$, le altre sono instabili.

2. Ora le uniche forze agenti sul sistema 1–dimensionale sono la gravità e la forza viscosa. Le uniche configurazioni di equilibrio sono banalmente $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Data la presenza della forza viscosa non possiamo studiare la stabilità con il metodo qualitativo per sistemi 1–dimensionali. La configurazione $\theta = 0$ è stabile per TLD perchè è un minimo dell'energia potenziale

$$U^g(\theta) = -mg\frac{3}{2}l\cos\theta.$$

Per discutere l'equilibrio $\theta = \pi$ (massimo di U^g) dobbiamo usare il primo metodo di Liapunov. L'equazione del moto si ottiene dalle equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}) - \frac{\partial T}{\partial\theta} = -\frac{\partial U^g}{\partial\theta} + Q^B_\theta.$$

L'energia cinetica è quella di un corpo rigido con un punto fisso A e quindi

$$T(\dot\theta) = \frac{1}{2}\omega\cdot I_A\omega = \frac{1}{2}I_A\dot\theta^2.$$

Calcoliamo Q^B_θ :

$$\delta L = F^B\cdot\delta B = F^B\cdot v_B dt = -kl\dot\theta l\dot\theta dt = -kl^2\dot\theta d\theta = Q^B_\theta d\theta, \qquad Q^B_\theta = -kl^2\dot\theta$$

Pertanto, l'equazione del moto è

$$I_A\ddot\theta = mg\frac{3}{2}l\sin\theta - kl^2\dot\theta.$$

La ridotta al primo ordine è

$$\begin{cases} \dot\theta = v, \\ \dot v = \frac{3lmg}{2I_A}\sin\theta - \frac{kl^2}{I_A}v. \end{cases}$$

La linearizzata in $(\theta, v) = (\pi, 0)$ è, ponendo $\delta\theta = \theta - \pi$, $\delta v = v - 0 = v$

$$\begin{cases} \dot{\delta\theta} = v, \\ \dot v = \frac{3lmg}{2I_A}\delta\theta - \frac{kl^2}{I_A}v. \end{cases}$$

La matrice del sistema lineare è quindi

$$X'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3lmg}{2I_A} & -kl^2 I_A \end{pmatrix}$$

L'equazione per gli autovalori è

$$\det(X'(0) - \lambda\mathbb{I}) = \lambda^2 + \frac{kl^2}{I_A}\lambda - \frac{3mgl}{2I_A} = 0$$

che ha soluzioni reali di segno opposto. Si ha quindi instabilità per il primo metodo.