Esercizio B della prova del 7 luglio 2008. **B** Nel piano verticale Oxy del sistema inerziale $Oxyz$, y verticale ascendente $\underline{\mathbf{g}} = -g\,\hat{\mathbf{y}},\ g > 0$, un disco omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare sull'asse x. Un'asta di massa trascurabile e di lunghezza l è incernierata senza attrito per un suo estremo nel baricentro G del disco. Sull'altro suo estremo è solidale un punto materiale P di massa m. Sia x l'ascissa di G, inoltre, sia ϑ l'angolo (valutato in senso anti-orario nel semi-spazio $z > 0$) dalla semiretta parallela a y e orientata come $-\hat{\mathbf{y}}$ passante per G alla semiretta per GP.

Scrivere la Lagrangiana del sistema, individuare una ciclicità, determinare l'integrale primo associato e, per scelte di valori iniziali per cui tale integrale primo valga zero, $c = 0$, studiare il sistema 1-DIM ridotto col metodo di Routh; individuarne un equilibrio stabile e determinarne la frequenza di piccola oscillazione.

SOLUZIONE (traccia):

$$T_D = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{3}{4}M\dot{x}^2$$

$$OP(x,\theta) = (x + l\sin\theta, R - l\cos\theta) \qquad v_P = (\dot{x} + \cos\theta\dot{\theta}, l\sin\theta\dot{\theta})$$

$$T_P = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\cos\theta\dot{x}\dot{\theta})$$

$$U(x,\theta) = mg(R - l\cos\theta) \approx -mgl\cos\theta$$

$$L = T - U, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \mathcal{I} := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2}M\dot{x} + m\dot{x} + ml\cos\theta\dot{\theta}$$

$$\text{per} \quad \mathcal{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -\frac{2ml\cos\theta}{3M + 2m}\dot{\theta} = f(\theta,\dot{\theta})$$

La Lagrangiana del sistema ridotto con Routh è:

$$\mathcal{L}(\theta,\dot{\theta}) = L\big|_{\dot{x}=f(\theta,\dot{\theta})} - \underbrace{\mathcal{I}}_{=0} f(\theta,\dot{\theta}) = \cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{-2m^2\cos\theta}{3M + 2m} + m\right)l^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

Chiaramente, l'equilibrio stabile del sistema ridotto, di cui si individua en. cinetica e en. potenziale $\mathcal{U} = -mgl\cos\theta$, è $\theta = 0$:

$$T_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{3Mm}{3M + 2m}\right)l^2\dot{\theta}^2, \qquad \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

Il quadrato della pulsazione di piccola oscillazione è

$$\omega^2 = \frac{mgl}{\frac{3Mml^2}{3M+2m}} = \frac{\frac{g}{l}}{\frac{3M}{3M+2m}} = \frac{g(3M + 2m)}{3Ml}.$$