LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
PRIMO COMPITINO — 13 Febbraio 2009

A.1 Una particella libera di massa $m = 1$ è soggetta alla forza:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}3 \to \mathbb{R}3, \qquad OP = (x, y, z) \mapsto \mathbf{F}(OP) = (\frac{y - 2x}{(1 + x^2)^2}, xy, z^3)$$

(i) E' conservativa?
Si vincoli la particella su di una guida senza attrito e coincidente con l'asse x; oltre a $\mathbf{F}$, agisce la forza di gravità, dove l'asse z è verticale ascendente, $\mathbf{g} = -g\,\hat{z},\ g > 0$. Del sistema 1-dim così ottenuto,
(ii) abbozzare il diagramma in fase.
(iii) Si determinino le condizioni sulle velocità iniziali $\dot{x}_0 \in \mathbb{R}$ affinché, partendo al tempo $t = 0$ da $x_0 = 0$, le traiettorie così costruite siano (tutte) periodiche.
(iv) Determinare gli equilibri e, usando i teoremi finora visti a lezione, studiarne la stabilità (non sono ammesse risposte del tipo: è evidente che è (in)stabile...)

B.1 Nel piano Oxy, ove y è verticale ascendente, $\mathbf{g} = -g\,\hat{y},\ g > 0$, si consideri il sistema formato da una guida rettilinea formante un angolo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ con l'asse y, da un disco di massa nulla vincolato a ruotare senza strisciare sulla guida e da un punto materiale P di massa m vincolato nel centro del disco. Il piano Oxy ruota con velocità angolare $\omega = \omega\hat{y}$ costante rispetto ad un riferimento inerziale. Inoltre, tra l'origine 0 e il punto P è tesa una molla di costante elastica $h > 0$. Si descriva la posizione di P usando l'ascissa curvilinea s del punto di contatto C tra guida e disco, orientata positivamente nella direzione del versore $\mathbf{u} = \sin\alpha\hat{x} + \cos\alpha\hat{y}$.
(i) determinare le configurazioni di equilibrio *relativo* e studiare la loro stabilità al variare del parametro ω in base ai teoremi visti nel corso
(ii) determinare la reazione vincolare che mantiene il disco nel piano Oxy per un determinato atto di moto $(s, \dot{s})$
(iii) come si modifica la discussione sulla stabilità del punto (i) se si aggiunge una forza viscosa in P, $F_P = -kv_P$, $K > 0$?

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

SOLUZIONI

Esercizio B

B.1. (i) Nel sistema rotante agiscono la forza di gravità, la forza elastica e la forza centrifuga, tutte conservative, e la forza di Coriolis. Quest'ultima è nulla negli equilibri e quindi non interviene nella determinazione degli stessi. Inoltre, le sue componenti lagrangiane sono nulle perchè la forza $F^{cor} = -2m\omega \wedge v_p$ è ortogonale al piano Oxy mentre gli spostamenti virtuali di P vi appartengono. Quindi posso applicare THND, oltre che TLD per studiare la stabilità degli equilibri. Osservo infine che $y_P = y_C + cost$. L'energia potenziale totale è

$$U = U^g + U^{el} + U^{cf} = mgy_C + \frac{h}{2}OP^2 - \frac{m\omega^2}{2}P'P^2$$

$$U(s) = mg\cos\alpha s + \frac{h}{2}s^2 - \frac{m\omega^2}{2}(s\sin\alpha - R\cos\alpha)^2.$$

Calcolo gli equilibri.

$$U'(s) = mg\cos\alpha + (h - m\omega^2\sin^2\alpha)s + m\omega^2 R\cos\alpha\sin\alpha = 0$$

porge

$$s^* = \frac{m(g + \omega^2 R\sin\alpha)\cos\alpha}{m\omega^2\sin^2\alpha - h}, \qquad h \neq m\omega^2\sin^2\alpha.$$

Studio stabilità con THND. $U'(s)$ è una parabola.

$$H_U(s^*) = U''(s^*) = h - m\omega^2\sin^2\alpha$$

Quindi S^* è stabile se $\omega^2 < \frac{h}{m\sin^2\alpha}$ e instabile se $\omega^2 > \frac{h}{m\sin^2\alpha}$.
(ii) L'unica forza agente ortogonalmente al piano è la forza di Coriolis, che deve essere bilanciata dalla reazione $\Phi = \Phi\hat{z}$. Si ha quindi

$$\Phi = -F^{cor} = 2m\omega\hat{y} \wedge v_P = 2m\omega\hat{y} \wedge \dot{s}\mathbf{u} = -2m\omega\dot{s}\sin\alpha\hat{z}.$$

(iii) La forza viscosa in P ha componente Lagrangiana data da

$$\delta L = F_P \cdot \delta P = -k\dot{s}\mathbf{u} \cdot \delta s\mathbf{u} = Q\delta s, \qquad \Rightarrow \qquad Q = -k\dot{s}.$$

La presenza di F_P, nulla negli equilibri, non altera gli stessi, ma impedisce di usare THND. Gli equilibri prima stabili (per TLD) rimangono tali, mentre per quelli prima instabili ora non posso dire nulla.