LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
PRIMO COMPITINO — 13 Febbraio 2009

A.2 Una particella libera di massa $m = 1$ è soggetta alla forza:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad OP = (x, y, z) \mapsto \mathbf{F}(OP) = (-\frac{(1-2x^2)e^{-x^2}}{(1+y^2)^2}, xy, z^3)$$

(i) E' conservativa?
Si vincoli la particella su di una guida senza attrito e coincidente con l'asse x; oltre a $\mathbf{F}$, agisce la forza di gravità, dove l'asse z è verticale ascendente, $\mathbf{g} = -g\,\hat{z},\ g > 0$. Del sistema 1-dim così ottenuto,
(ii) abbozzare il diagramma in fase.
(iii) Determinare gli equilibri e, usando i teoremi finora visti a lezione, studiarne la stabilità (non sono ammesse risposte del tipo: è evidente che è (in)stabile...)

B.2 Nel piano Oxy, ove y è verticale ascendente, $\mathbf{g} = -g\,\hat{y},\ g > 0$, si consideri il sistema formato da una guida rettilinea formante un angolo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ con l'asse y, da un disco di massa nulla vincolato a ruotare senza strisciare sulla guida, da un punto materiale P di massa m vincolato nel centro del disco e da un'asta CQ (il cui estremo C coincide con il punto C *della guida* a contatto con il disco) di massa nulla avente nell'estremo Q un punto materiale di massa M. Inoltre, tra l'origine 0 e il punto P è tesa una molla di costante elastica $h > 0$. Si descriva la posizione di P usando l'ascissa curvilinea s del punto di contatto C tra guida e disco, orientata positivamente nella direzione del versore $\mathbf{u} = \sin\alpha\hat{x} + \cos\alpha\hat{y}$ e la posizione di Q tramite l'angolo θ tra la direzione negativa dell'asse y e il segmento CQ valutato positivamente in senso antiorario.
(i) determinare le configurazioni di equilibrio e studiare la loro stabilità in base ai teoremi visti nel corso
(ii) calcolare la velocità del punto Q per un determinato atto di moto $(s, \dot{s}, \theta, \dot{\theta})$
(iii) come si modifica la discussione sulla stabilità del punto (i) se si aggiunge una forza viscosa in P, $F_P = -kv_P$, $K > 0$?

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

SOLUZIONI

Esercizio B

B.2. (i) Nel sistema agiscono solo forze conservative. Calcolo l'energia potenziale, tenendo conto che $y_P = y_C + cost.$

$$U = U^g + U^{el} = mgy_P + Mgy_Q + \frac{h}{2}OP^2$$

$$U(s,\theta) = g(m+M)\cos\alpha s - Mgl\cos\theta + \frac{h}{2}s^2$$

Calcolo gli equilibri

$$U_s = g(M+m)\cos\alpha + hs = 0, \qquad U_\theta = Mgl\sin\theta = 0$$

ha soluzione

$$P_1(s,\theta) = (-\frac{g(M+m)\cos\alpha}{h}, 0), \qquad P_2 = (-\frac{g(M+m)\cos\alpha}{h}, \pi)$$

Per la stabilità uso THND

$$H_U(s,\theta) = \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & Mgl\cos\theta \end{pmatrix}$$

e si vede immediatamente che P_1 è stabile e P_2 è instabile.

(ii) la velocità del punto Q si ottiene dalla FFMR

$$v_Q = v_C + \omega \wedge CQ = \dot{s}\mathbf{u} + \dot{\theta}\hat{z} \wedge l(\sin\theta\hat{x} - \cos\theta\hat{y}) = (\dot{s}\sin\alpha + l\cos\theta\dot{\theta})\hat{x} + (\dot{s}\cos\alpha + l\sin\theta\dot{\theta})\hat{y}.$$

(iii) La forza viscosa in P ha componente Lagrangiana data da

$$\delta L = F_P \cdot \delta P = -k\dot{s}\mathbf{u} \cdot \delta s\mathbf{u} = Q\delta s, \qquad \Rightarrow \qquad Q = -k\dot{s}.$$

La presenza di F_P, nulla negli equilibri, non altera gli stessi, ma impedisce di usare THND. Gli equilibri prima stabili (per TLD) rimangono tali, mentre per quelli prima instabili ora non posso dire nulla.