Primo compitino di Fisica Matematica 13/2/2009
Seguono le versioni A.1 e A.2 dell'esercizio A:
A.1 Una particella libera di massa $m = 1$ è soggetta alla forza:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad OP = (x, y, z) \mapsto \mathbf{F}(OP) = (\frac{y - 2x}{(1 + x^2)^2}, xy, z^3)$$

(i) E' conservativa?
Si vincoli la particella su di una guida senza attrito e coincidente con l'asse x; oltre a $\mathbf{F}$, agisce la forza di gravità, dove l'asse z è verticale ascendente, $\mathbf{g} = -g\,\hat{z},\ g > 0$. Del sistema 1-dim così ottenuto,
(ii) abbozzare il diagramma in fase.
(iii) Si determinino le condizioni sulle velocità iniziali $\dot{x}_0 \in \mathbb{R}$ affinché, partendo al tempo $t = 0$ da $x_0 = 0$, le traiettorie così costruite siano (tutte) periodiche.
(iv) Determinare gli equilibri e, usando i teoremi finora visti a lezione, studiarne la stabilità (non sono ammesse risposte del tipo: è evidente che è (in)stabile...)

Soluzione (bozza). La forma lavoro associata a questa forza posizionale $\delta L^F = \mathbf{F} \cdot dP$ non è chiusa, dunque $\mathbf{F}$ non è conservativa. Per il sistema vincolato, i moti din. poss. (rem.: $m = 1$):

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ 0 &= \Phi_y \\ 0 &= -g + \Phi_z \end{cases}$$

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int^x -\frac{2\lambda}{(1 + \lambda^2)^2} d\lambda = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{1 + x^2} + cost. \quad (cost = 0),$$

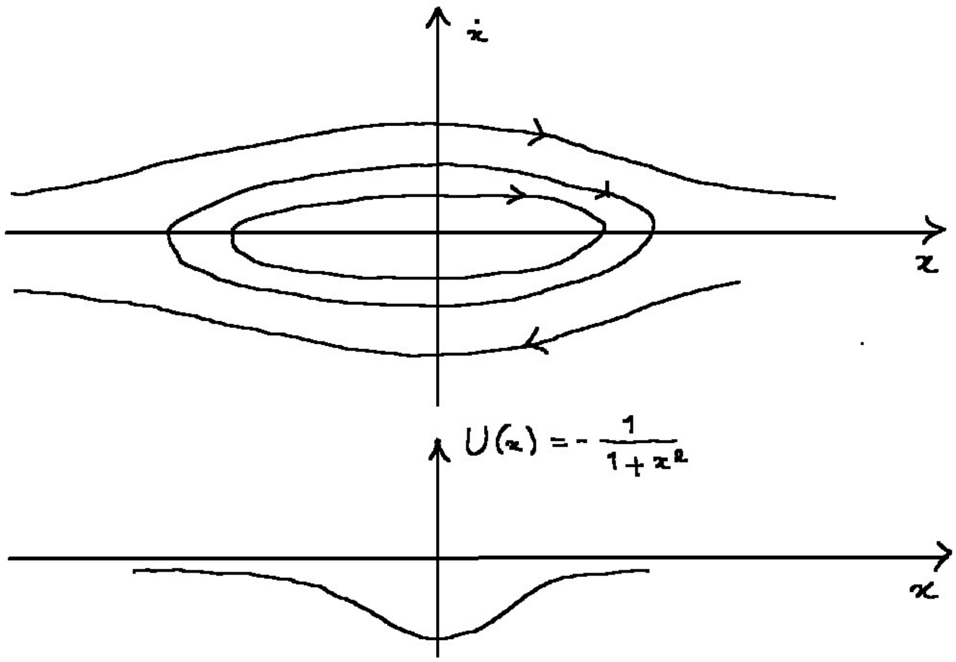
$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{1 + x^2},$$

Dal diagramma in fase per $U(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ si vede che le orbite che non vanno all' ∞ e che sono periodiche sono per $E < 0$:

$$\frac{1}{2}\dot{x}_0^2 - \frac{1}{1 + x_0^2} = \frac{1}{2}\dot{x}_0^2 - 1 < 0 \ \Rightarrow\ \dot{x}_0^2 < 2, \quad |\dot{x}_0| < \sqrt{2}.$$

L'unico equilibrio è $x = 0$ e $U(x)$ ha in esso un minimo stretto locale:

$$\frac{d}{dx}U(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}, \qquad \frac{d^2}{dx^2}U(0) = 2 > 0 : \quad \textit{stabile}$$


$\dot{x}$
x
$U(x) = -\frac{1}{1+x^2}$
x

A.2 Una particella libera di massa $m = 1$ è soggetta alla forza:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad OP = (x, y, z) \mapsto \mathbf{F}(OP) = (-\frac{(1-2x)e^{-x^2}}{(1+y^2)^2}, xy, z^3)$$

(i) E' conservativa?
Si vincoli la particella su di una guida senza attrito e coincidente con l'asse x; oltre a $\mathbf{F}$, agisce la forza di gravità, dove l'asse z è verticale ascendente, $\mathbf{g} = -g\,\hat{z},\ g > 0$. Del sistema 1-dim così ottenuto,
(ii) abbozzare il diagramma in fase.
(iii) Determinare gli equilibri e, usando i teoremi finora visti a lezione, studiarne la stabilità (non sono ammesse risposte del tipo: è evidente che è (in)stabile...)

Soluzione (bozza). La forma lavoro associata a questa forza posizionale $\delta L^F = \mathbf{F} \cdot dP$ non è chiusa, dunque $\mathbf{F}$ non è conservativa. Per il sistema vincolato, i moti din. poss. (rem.: $m = 1$):

$$\begin{cases} \ddot{x} &= (2x^2 - 1)e^{-x^2} \\ 0 &= \Phi_y \\ 0 &= -g + \Phi_z \end{cases}$$

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int^x (2\lambda^2 - 1)e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + xe^{-x^2} + cost. \ (cost = 0),$$

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \underbrace{xe^{-x^2}}_{U(x)}$$

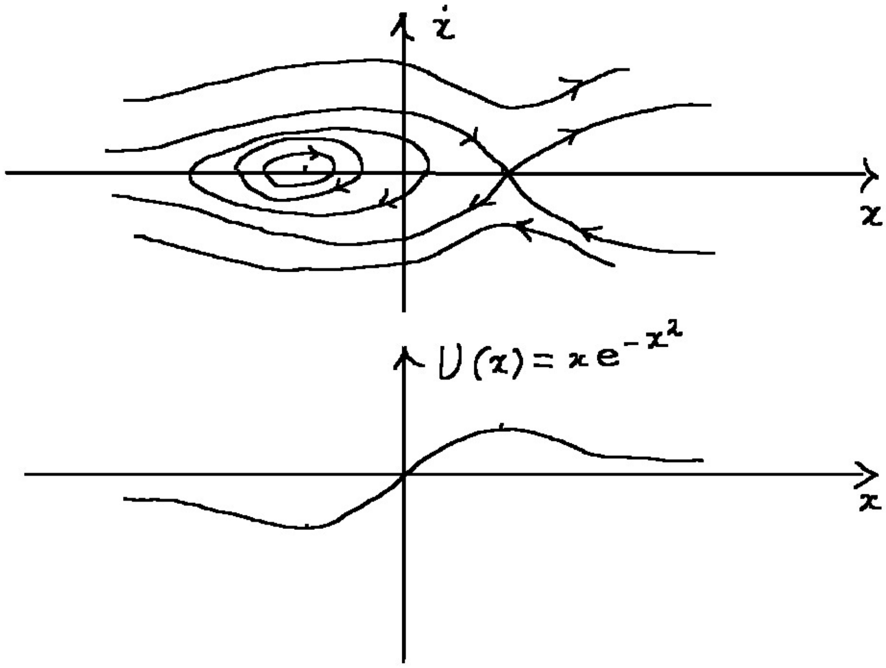
Ci sono due equilibri:

$$\frac{d}{dx}U(x) = -(2x^2 - 1)e^{-x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^E_{(-)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x^E_{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si può usare il THND dato che sono p.ti critici non degeneri $\left(\frac{d^2}{dx^2}U(x) = 2x(-3 + 2x^2)e^{-x^2}\right)$:

$$\frac{d^2}{dx^2}U(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{2}{\sqrt{2}}(-3+1)e^{-\frac{1}{2}} > 0 : \quad \textit{stabile}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}U(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2}{\sqrt{2}}(-3+1)e^{-\frac{1}{2}} < 0 : \quad \textit{instabile}$$


ẋ
x
U(x) = x e^{-x^2}
x