



LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
SECONDO COMPITINO — 12 Marzo 2009

A Si consideri il sistema dinamico nel piano $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(3 - x - 2y) \\ \dot{y} &= y(2 - x - y) \end{cases}$$

Determinarne gli equilibri e studiarne la stabilità.

B Nel piano Oxy , ove y è verticale ascendente, $\mathbf{g} = -g\hat{y}$, $g > 0$, si consideri il sistema formato da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza l avente l'estremo A incernierato nell'origine e da un'asta BP di massa *nulla* avente l'estremo B in comune con l'estremo libero B della prima asta e avente nell'estremo libero P un punto materiale di massa m . Si riferisca la posizione della prima asta all'angolo θ tra la direzione positiva dell'asse y e l'asta AB , valutato positivamente in senso orario, e la posizione della seconda asta all'angolo ϕ tra la direzione negativa dell'asse y e l'asta BP , valutato positivamente in senso antiorario. Oltre alla gravità, sul sistema agisce una molla lineare di costante elastica $h > 0$ e lunghezza a riposo nulla tesa tra il punto $C = (0, l)$ e il punto B .

Formula utile (Teorema di Carnot o del coseno) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$.

- (i) determinare le configurazioni di equilibrio e studiare la loro stabilità in base ai teoremi visti nel corso nell'ipotesi $2hl > 3mg$
(ii) calcolare l'energia cinetica del sistema
(iii) calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una posizione di equilibrio stabile.
E' sufficiente scrivere accuratamente la matrice M che compare nell'equazione $\det M = 0$.

-
- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
 - *Scrivere nome e cognome in stampatello su ogni foglio consegnato.*
 - *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
 - *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*
-

SOLUZIONI

Esercizio B

B (i) Nel sistema agiscono solo forze conservative. Nel calcolo dell'energia potenziale elastica, uso la relazione $CB^2 = 2l^2 - 2l^2 \cos \theta$

$$U(\theta, \phi) = U^g + U^{el} = mg\left[\frac{l}{2} \cos \theta + l \cos \theta - l \cos \phi\right] + \frac{h}{2} 2l^2(1 - \cos \theta)$$

Calcolo gli equilibri

$$U_\theta = -l\left(\frac{3}{2}mg - hl\right) \sin \theta = 0, \quad U_\phi = mgl \sin \phi = 0$$

da cui $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (\pi, 0)$, $P_3 = (0, \pi)$, $P_4 = (\pi, \pi)$ Per la stabilità uso THND dopo aver calcolato la matrice hessiana di U

$$H_U(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -l\left(\frac{3}{2}mg - hl\right) \cos \theta & 0 \\ 0 & mgl \cos \phi \end{pmatrix}$$

e si vede immediatamente che P_1 è stabile stante l'ipotesi $2hl > 3mg$ e P_i è instabile per $i > 1$.

(ii) L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}v_P^2, \quad I_O = \frac{ml^2}{3}$$

La velocità del punto P si ottiene dalla FFMR $v_P = v_B + \omega \wedge BP$ da cui

$$v_P^2 = v_B^2 + (\omega \wedge BP)^2 + 2v_B \cdot \omega \wedge BP = l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2l^2 \cos(\theta + \phi)\dot{\theta}\dot{\phi}.$$

pertanto, la matrice dell'energia cinetica è

$$A(\theta, \phi) = ml^2 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \cos(\theta + \phi) \\ \cos(\theta + \phi) & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni dell'equazione $\det M = 0$ ove

$$M = H_U(P_1) - \Omega^2 A(P_1) = ml^2 \begin{pmatrix} \left(\frac{h}{m} - \frac{3g}{2l}\right) - \frac{4}{3}\Omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \frac{g}{l} - \Omega^2 \end{pmatrix}$$