LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
PROVA PRATICA — 14 Luglio 2009

A Si consideri un generico sistema di equazioni differenziali nel primo ordine nel piano $\mathbb{R}^2$ di tipo *gradiente*, cioè esiste una funzione C^1 scalare $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che, posto $z := (x, y)$, si ha $\dot{z} = -\nabla V(z)$, dove ∇ è il gradiente; in componenti:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) \quad (=: f(x,y)) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial V}{\partial y}(x,y) \quad (=: g(x,y)) \end{cases}$$

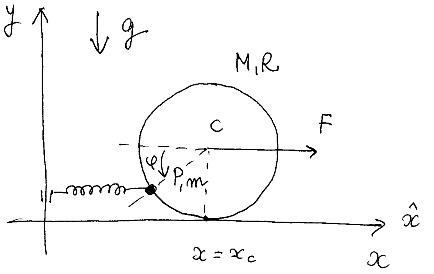
(A_1) Se V ammette in $z = (0,0)$ un minimo stretto locale, il punto $z = (0,0)$ è un equilibrio? inoltre è stabile? spiegare in dettaglio.
Si consideri ora il sistema di equazioni differenziali nel primo ordine nel piano $\mathbb{R}2$

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + 2xy \qquad (=: f(x,y)) \\ \dot{y} &= x + x^2 - y^2 \quad (=: g(x,y)) \end{cases}$$

(A_2) Questo sistema è di tipo gradiente? Il punto $z = (0,0)$ è d'equilibrio stabile? Oppure no? Il primo metodo di Liapunov ci può eventualmente aiutare?

B In un riferimento inerziale $Oxyz$ con y verticale ascendente si consideri il sistema giacente nel piano Oxy, costituito da un anello di massa M, raggio R, e centro C, vincolato in modo liscio a ruotare *genericamente* sull'asse x e da un punto materiale P di massa m vincolato in modo liscio a scorrere sull'anello. Si riferisca il sistema alle coordinate $x = x_C$ e φ, angolo tra la direzione negativa dell'asse x e il vettore CP, valutato positivamente in senso antiorario. Sul centro C dell'anello agisce una forza $F = \frac{k}{2}x\hat{x}$, con $k > 0$, mentre tra il punto P e l'asse y è tesa una molla di costante elastica k che si mantiene sempre orizzontale.

1. Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità sulla base dei teoremi visti nel corso al variare del parametro $\lambda = mg/kR$, ove g è l'accelerazione di gravità.
2. Si supponga ora che l'anello rotoli *senza strisciare*. Scrivere l'energia cinetica del sistema e calcolare (a meno della soluzione di un'equazione di secondo grado) le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad una configurazione di equilibrio (quando è stabile) con $\varphi = \pi/2$.



- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

SOLUZIONI

Esercizio A

(A_1) Se $z = (0,0)$ un minimo stretto locale per la funzione C^1 in studio, allora $\nabla V(0,0) = 0$, quindi è un equilibrio. V ha il ruolo di (candidata) funzione di Liapunov: V è localmente definita positiva e lungo le soluzioni (derivata di Lie)

$$\dot{V} = L_{-\nabla V} V = \nabla V \cdot (-\nabla V) = -|\nabla V|^2 \leq 0$$

duque è di Liapunov e $z = (0,0)$ è stabile.
(A_2) Si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = 1 + 2x$$

e nel piano $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, si ha la primitiva:

$$\bar{V}(x,y) = \int_0^1 (y + 2xy)\Big|_{[0,1]\ni t\mapsto(tx,0)\in\mathbb{R}^2} x\,dt + \int_0^1 (x + x^2 - y^2)\Big|_{[0,1]\ni t\mapsto(x,ty)\in\mathbb{R}^2} y\,dt =$$

$$= \int_0^1 xy + x^2y - t^2y^3\,dt = xy + x^2y - \frac{y^3}{3}$$

$$V = -\bar{V} = -xy - x^2y + \frac{y^3}{3}$$

Si noti che quest'ultima determinazione analitica di V non era necessaria: in realtà, dopo aver verificato che il sistema è gradiente, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$, si osserva che necessariamente dev'essere $\nabla V(0,0) = 0$ e che l'Hessiana di V in $(0,0)$ vale

$$\nabla^2 V(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalori $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 1$, dunque $(0,0)$ non è un minimo stretto locale per V e questa non è funzione di Liapunov. Però l'Hessiana in $(0,0)$, cambiata di segno, ci dà anche la matrice del sistema linearizzato:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm 1$, instabilità per il primo metodo.

Esercizio B

Le forze agenti sono tutte conservative, di energia potenziale

$$U = U^g + U^{el} + U^F = -mgR\sin\varphi + \frac{k}{2}(x - R\cos\varphi)^2 - \frac{k}{4}x^2.$$

Calcoliamo gli equlibri risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x,\varphi) &= k(x - R\cos\varphi) - \frac{k}{2}x = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi}(x,\varphi) &= -mgR\cos\varphi + k(x - R\cos\varphi)R\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

che si riscrive nelle equazioni

$$R\cos\varphi(kR\sin\varphi - mg) = 0, \qquad x = 2R\cos\varphi$$

posto $\lambda = mg/kR > 0$, le soluzioni sono, ove esistono,

$$P_1 = (0, \frac{\pi}{2}), \quad P_2 = (0, \frac{3\pi}{2}), \quad P_3 = (2R\sqrt{1-\lambda^2}, \arcsin\lambda), \quad P_4 = (-2R\sqrt{1-\lambda^2}, \pi - \arcsin\lambda)$$

Per la stabilità in presenza di sole forze conservative, possiamo usare THND.

La matrice Hessiana è

$$H_U(x,\varphi) = \begin{pmatrix} k/2 & kR\sin\varphi \\ kR\sin\varphi & f(x,\varphi) \end{pmatrix}, \quad f(x,\varphi) = -kR^2 + 2kR^2\sin^2\varphi + kRx\cos\varphi + mgR\sin\varphi$$

Essendo $k/2$ sempre positivo, basta valutare f negli equilibri e chiedere $\det H_U > 0$. Si vede che

$$f(2R\cos\varphi,\varphi) = kR^2 + mgR\sin\varphi$$

P_1 è stabile se $\lambda > 1$ e instabile se $\lambda < 1$, per $\lambda = 1$ THND non è applicabile
P_2 è instabile sempre per THND
P_3, P_4 ove esistono sono stabili

Energia cinetica. Per il T. di Konig, con $I_C = MR^2$, $\omega^2 = \dot{x}^2/R^2$ e $v_P^2 = \dot{x}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\sin\varphi\dot{x}\dot{\varphi}$

$$T = T^P + T^A = \frac{m}{2}v_P^2 + \frac{M}{2}v_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 = \frac{1}{2}[(m+2M)\dot{x}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2 + 2R\sin\varphi\,\dot{x}\dot{\varphi}]$$

Calcoliamo le matrici H_U e A in P_1 per $\lambda > 1$. Si trova

$$H_U(P_1) = \begin{pmatrix} k/2 & kR \\ kR & kR^2 + mgR \end{pmatrix}, \qquad A(P_1) = \begin{pmatrix} m+2M & mR \\ mR & mR^2 \end{pmatrix},$$

Le frequenze di piccola oscillazione sono le soluzioni di $\det(H_U - \omega^2 A) = 0$.