LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
PROVA PRATICA — 23 Marzo 2009

A$_1$ Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine in $\mathbb{R}^2$ dipendente dal parametro reale a,

$$\begin{cases} \dot{x} &= -ay + a(x-y)^3 \\ \dot{y} &= x - ay + ax^3 + a(x-y)^3 \end{cases}$$

L'equilibrio $(x^*, y^*) = (0,0)$ esiste per ogni $a \in \mathbb{R}$. Discuterne la stabilità al variare di $a \in [0, +\infty)$ mediante il primo metodo (spettrale) di Liapunov. (Suggerimento: nei casi in cui il primo metodo non funzionasse, indagare sulla stabilità determinando esplicitamente le soluzioni).

A$_2$ Si consideri l'equazione differenziale del primo ordine in $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \dot{x} &= (x-y)^3 \\ \dot{y} &= x - y + x^3 + (x-y)^3 \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $(0,0)$ mediante la funzione:

$$W(x,y) = x^4 + (x-y)^4$$

B Nel piano Oxy, ove y è verticale ascendente, $\mathbf{g} = -g\,\hat{y}$, $g > 0$, si consideri il sistema formato da un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza l avente l'estremo A incernierato nell'origine e da un punto materiale P di massa m vincolato in modo liscio a scorrere sull'asse orizzontale x. Sia $x = x_P$ l'ascissa di P e si riferisca la posizione dell'asta all'angolo θ tra la direzione negativa dell'asse y e l'asta AB, valutato positivamente in senso antiorario. Oltre alla gravità, sul sistema agisce una molla lineare di costante elastica $h > 0$ e lunghezza a riposo nulla tesa tra il punto B dell'asta e il punto P. Infine, il riferimento $Oxyz$ ruota rispetto ad uno spazio inerziale con velocità angolare costante ω diretta come la direzione positiva dell'asse y.

Formula utile (Teorema di Carnot o del coseno) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$.

(i) determinare le configurazioni di equilibrio relativo (cioè nel sistema rotante) e scrivere esplicitamente le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità di $x = 0, \theta = 0$ al variare di ω nei reali positivi
(ii) calcolare l'energia cinetica del sistema
(iii) calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio $x = 0, \theta = 0$ supposta stabile. E' sufficiente scrivere accuratamente la matrice M che compare nell'equazione $\det M = 0$.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

SOLUZIONI

Esercizio A

Il sistema linearizzato attorno a $(0,0)$ è

$$\begin{cases} \dot{x} &= -ay \\ \dot{y} &= x - ay \end{cases}$$

Si deve impostare il calcolo degli autovalori, al variare di $a \in [0, +\infty)$ della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & -a \end{pmatrix}, \qquad \det \begin{pmatrix} -\lambda & -a \\ 1 & -a-\lambda \end{pmatrix} = 0, \qquad \lambda^2 + a\lambda + a = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}, \qquad R(a) := a^2 - 4a, \qquad (*)$$

$R(a) = 0$ per $a_1 = 0, \quad a_2 = 4$

• per $a_2 = 4 < a$: $R(a) > 0$ e dunque $\lambda_1 < 0$ e c'è da vedere se

$$\lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{R(a)}}{2} \text{ è anch'esso negativo:}$$

$-a + \sqrt{a^2 - 4a} < 0$ se e solo se $a > 0$, dunque:

$$(0,0) \text{ è asintoticamente stabile per } a_2 = 4 < a$$

• Il caso $a = 4$: $\lambda_{1,2} = -2$, ancora asintoticamente stabile.
• Il caso $0 < a < 4$: $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm i\sqrt{|R(a)|}}{2}$: ancora asintoticamente stabile.
• Infine, per $a = 0$: il primo metodo non funziona, però il sistema originale diventa semplicemente:

$$\begin{cases} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= x \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} x(t, x_0, y_0) &= x_0 \\ y(t, x_0, y_0) &= y_0 + x_0 t \end{cases}$$

Ci sono dunque orbite (rette) che partono vicino quanto vogliamo a $(0,0)$ e si allontanano definitivamente da $(0,0)$: instabilità.

2) Mostriamo che W è funzione di Liapunov per la stabilità (semplice). Infatti, è evidente che W è definita positiva attorno a $(0,0)$, si tratta di studiare la sua derivata di Lie,

$$L_{\mathbf{X}} W(x,y) = \nabla W \cdot \mathbf{X} =$$
$$= [4x^3 + 4(x-y)^3](x-y)^3 - 4(x-y)^3[x - y + x^3 + (x-y)^3] =$$
$$= -4(x-y)^4 \leq 0$$

Dunque $L_{\mathbf{X}} W(x,y)$ è solo semi-definita negativa, otteniamo così la semplice stabilità.

Esercizio B

B (i) Per prima cosa osserviamo che le componenti Lagrangiane della forza di Coriolis sono nulle perchè il moto è piano e la forza è ortogonale al piano Oxy del moto. Nel sistema agiscono quindi solo forze conservative.

$$U(\theta, x) = U^g + U^{el} + U^{cf} = -mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{h}{2}[l^2 + x^2 - 2lx\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)] - \frac{\omega^2}{2}(mx^2 + \frac{ml^2}{3}\sin^2\theta)$$

$$U(\theta,x) = -mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}(h-m\omega^2)x^2 - hlx\sin\theta - \frac{\omega^2}{2}\frac{ml^2}{3}\sin^2\theta.$$

Calcolo gli equilibri

$$U_\theta = mg\frac{l}{2}\sin\theta - hlx\cos\theta - \frac{ml^2}{3}\omega^2\sin\theta\cos\theta = 0, \qquad U_x = (h-m\omega^2)x - hl\sin\theta = 0$$

Sostituendo dalla seconda equazione $x = \frac{hl}{h-m\omega^2}\sin\theta$ nella prima, nell'ipotesi $h - m\omega^2 \neq 0$, si ottiene un'equazione del tipo

$$\sin\theta(a - b\cos\theta) = 0, \quad a = mg\frac{l}{2} > 0, \quad b = \frac{h^2l^2}{h-m\omega^2} + \frac{ml^2}{3}\omega^2.$$

che ha soluzioni

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi, \quad \theta_{3,4} = \arccos(\frac{a}{b}) \quad \text{se} \quad |\frac{a}{b}| \leq 1.$$

Per la stabilità di $P_1 = (\theta = 0, x = 0)$, uso THND dopo aver calcolato la matrice hessiana di U

$$H_U(\theta,x)_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} mg\frac{l}{2} - \frac{ml^2}{3}\omega^2 & -hl \\ -hl & h - m\omega^2 \end{pmatrix}$$

e si vede immediatamente che P_1 è stabile se e solo se

$$h - m\omega^2 > 0, \qquad \det H_U = (mg\frac{l}{2} - \frac{ml^2}{3}\omega^2)(h-m\omega^2) - h^2l^2 > 0.$$

(ii) L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot\theta^2 + \frac{m}{2}\dot x^2, \qquad I_O = \frac{ml^2}{3}$$

pertanto, la matrice dell'energia cinetica è

$$A(\theta,x) = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

(iii) le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni dell'equazione $\det M = 0$ ove

$$M = H_U(P_1) - \Omega^2 A(P_1) = \begin{pmatrix} mg\frac{l}{2} - \frac{ml^2}{3}\omega^2 - \frac{ml^2}{3}\Omega^2 & -hl \\ -hl & h - m\omega^2 - m\Omega^2 \end{pmatrix}$$