LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
PROVA PRATICA — 31 Marzo 2009

A Si consideri il sistema meccanico uno–dimensionale composto da una particella P di massa $m > 0$ vincolata senza attrito su di una guida rettilinea orizzontale. La posizione di P è individuata dall'ascissa q di P rispetto ad un'origine O fissata sulla guida. La particella è soggetta alla sollecitazione Lagrangiana di componente

$$Q(q, \dot{q}) = -\tan(q + q^3 + \dot{q}^3) - k \sin \dot{q}, \qquad k > 0.$$

i) Dire se il sistema è conservativo e motivare la risposta.

ii) Determinare gli equilibri e discutere la stabilità della configurazione di equilibrio $q = 0$ in base ai teoremi visti nel corso.

B Un punto materiale **P** di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie toroidale liscia di equazione parametrica:

$$\begin{cases} x &= (R + r\cos\theta)\cos\varphi, \\ y &= (R + r\cos\theta)\sin\varphi, \\ z &= r\sin\theta, \end{cases}$$

dove x, y, z sono coordinate cartesiane ortogonali, $r < R$, φ e θ sono coordinate (angoli) per $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

L'accelerazione di gravità sia: $\mathbf{g} = g\hat{x}$, $g > 0$.

(ii) Scrivere le equazioni di Lagrange del problema originale (non linearizzato) *con* $g = 0$. Verificare, o negare, che orbite uniformi sull'*equatore* esterno e su quello interno del toro, della forma:

$$(1): \quad \theta(t) \equiv 0, \quad \phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0, \qquad\qquad (2): \quad \theta(t) \equiv \pi, \quad \phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0,$$

con arbitrarie costanti reali $\dot{\phi}_0$ e ϕ_0, sono moti dinamicamente possibili.

(i) Determinare equilibri e discuterne la stabilità; calcolare le pulsazioni di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

SOLUZIONI

Esercizio A

Le componenti lagrangiane della sollecitazione dipendono dalla velocità e quindi non si possono esprimere come gradiente di una funzione della posizione: il sistema non è conservativo. Calcoliamo l'equazione di Lagrange a partire dall'energia cinetica $2T(q,\dot{q}) = m\dot{q}^2$. Da

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q(q,\dot{q})$$

si ottiene

$$m\ddot{q} = -\tan(q + q^3 + \dot{q}^3) - k\sin\dot{q}.$$

La configurazioni di equilibrio sono quelle per cui $Q(q^*, 0) = 0$ ovvero

$$q^* + (q^*)^3 = a\pi, \qquad a = 0, 1, 2, \dots.$$

Per $a = 0$, l'unica soluzione è $q^* = 0$. Per accertarne la stabilità non possiamo usare THND per la presenza di forze non conservative e nel TLD è difficile valutare se la condizione $Q(q,\dot{q})\dot{q} \le 0$ è soddisfatta. Proviamo con il primo metodo. Il sistema ridotto al primo ordine è

$$\begin{cases} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{m}\tan(q + q^3 + v^3) - \frac{k}{m}\sin v \end{cases}$$

e il sistema linearizzato attorno a $(0, 0)$ è

$$\begin{cases} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{m}\, q - \frac{k}{m} v \end{cases} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$ che si scrive

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{1}{m} = 0$$

Si vede subito che le soluzioni verificano $Re(\lambda_i) < 0$ e quindi l'equilibrio è asintoticamente stabile.