Fisica Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 31 marzo 2009

Attenzione: *Consegnare due (soli) distinti fogli; un foglio, contrassegnato* **A**-Cognome Nome*, con la soluzione dell'esercizio A, un ulteriore foglio contrassegnato* **B**-Cognome Nome*, con la soluzione dell'esercizio B.*

Esercizio B Un punto materiale **P** di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie toroidale liscia di equazione parametrica:

$$\begin{cases} x &= (R + r\cos\theta)\cos\varphi, \\ y &= (R + r\cos\theta)\sin\varphi, \\ z &= r\sin\theta, \end{cases}$$

dove x, y, z sono coordinate cartesiane ortogonali, $r < R$, φ e θ sono coordinate (angoli) per $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

L'accelerazione di gravità sia: $\mathbf{g} = g\hat{x}$, $g > 0$.

(i) Determinare equilibri e discuterne la stabilità; calcolare le pulsazioni di piccola oscillazione attorno ad un equilibrio stabile.

(ii) Scrivere le equazioni di Lagrange del problema originale (non linearizzato) *con* $g = 0$. Verificare, o negare, che orbite uniformi sull'*equatore* esterno e su quello interno del toro, della forma:

$$(1): \quad \theta(t) \equiv 0, \quad \phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0, \qquad\qquad (2): \quad \theta(t) \equiv \pi, \quad \phi(t) = \dot{\phi}_0 t + \phi_0,$$

con arbitrarie costanti reali $\dot{\phi}_0$ e ϕ_0, sono moti dinamicamente possibili.

============

Soluzione. Per l'energia cinetica dobbiamo scrivere

$$\begin{cases} \dot{x} &= -r\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\theta} - (R + r\cos\theta)\sin\varphi\,\dot{\varphi}, \\ \dot{y} &= -r\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\theta} + (R + r\cos\theta)\cos\varphi\,\dot{\varphi}, \\ \dot{z} &= r\cos\theta\,\dot{\theta}, \end{cases}$$

$$T(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m[r^2\dot{\theta}^2 + (R + r\cos\theta)^2\dot{\varphi}^2]$$

$$\mathcal{U}^g(\theta, \varphi) = -mg\,x(\theta, \varphi) = -mg(R + r\cos\theta)\cos\varphi$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{U}^g}{\partial\theta} &= mgr\sin\theta\cos\varphi \\ \\ \frac{\partial\mathcal{U}^g}{\partial\varphi} &= mg(R + r\cos\theta)\sin\varphi \end{cases}$$

Equilibri: $(R + r\cos\theta)$ non si annulla mai, dunque,

$$\frac{\partial\mathcal{U}^g}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{U}^g}{\partial\varphi} = 0 \iff (\theta_E, \varphi_E): \quad (0, 0),\ (0, \pi),\ (\pi, 0),\ (\pi, \pi)$$

$$\nabla^2\mathcal{U}^g(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} mgr\cos\theta\cos\varphi & -mgr\sin\theta\sin\varphi \\ \\ -mgr\sin\theta\sin\varphi & mg(R+r\cos\theta)\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2\mathcal{U}^g(0,0) = \begin{pmatrix} mgr & 0 \\ \\ 0 & mg(R+r) \end{pmatrix} : \text{def. pos., minimo loc., stabile (L-D, oppure THND)}$$

$$\nabla^2\mathcal{U}^g(\pi,0) = \begin{pmatrix} -mgr & 0 \\ \\ 0 & mg(R-r) \end{pmatrix} : \text{non def., sella, instabile (THND)}$$

$$\nabla^2\mathcal{U}^g(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} mgr & 0 \\ \\ 0 & -mg(R-r) \end{pmatrix} : \text{non def., sella, instabile (THND)}$$

$$\nabla^2\mathcal{U}^g(0,\pi) = \begin{pmatrix} -mgr & 0 \\ \\ 0 & -mg(R+r) \end{pmatrix} : \text{def. neg., massimo loc., instabile (THND)}$$

Energia cinetica di Piccole Oscillazioni attorno a $(0,0)$:

$$T^{(0)}(\dot\theta,\dot\varphi) = T(0,0,\dot\theta,\dot\varphi) = \frac{1}{2}m[r^2\dot\theta^2 + (R+r)^2\dot\varphi^2]$$

$$\det\begin{pmatrix} mgr-\omega^2 mr^2 & 0 \\ \\ 0 & mg(R+r)-\omega^2 m(R+r)^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{r}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R+r}}.$$

Equazioni di Lagrange, per $g=0$, $L=T$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0,$$

$$\begin{cases} mr^2\ddot\theta + mr(R+r\cos\theta)\sin\theta\,\dot\varphi^2 = 0, \\ \\ \frac{d}{dt}[m(R+r\cos\theta)^2\dot\varphi] = 0 \end{cases}$$

Si osserva che le famiglie di curve proposte

$$(1): \quad \theta(t)\equiv 0, \quad \phi(t) = \dot\phi_0 t + \phi_0, \qquad\qquad (2): \quad \theta(t)\equiv\pi, \quad \phi(t) = \dot\phi_0 t + \phi_0,$$

sono effettivamente delle soluzioni.