LAUREA DI PRIMO LIVELLO IN MATEMATICA
FISICA MATEMATICA
PROVA PRATICA — 16 Settembre 2009

A Nel piano Oxy, con y verticale ascendente, di un riferimento inerziale $Oxyz$ si consideri il sistema costituito da un'asta OA omogenea di massa m e lunghezza l vincolata in modo liscio con l'estremo O nell'origine e libera di ruotare nel piano Oxy. Si riferisca la posizione dell'asta all'angolo θ tra la direzione negativa dell'asse y e il segmento OA, valutato positivamente in senso antiorario. Sull'asta OA, oltre alla gravità, agisce una molla di costante elastica $h > 0$ tesa tra il punto A e il punto A' di eguale ascissa sull'asse x. Domande:

1. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e indagare qualitativamente la loro stabilità attraverso il grafico dell'energia potenziale nel caso : parametro $\lambda = mg/2hl > 1$.

2. Supponiamo che ora vi sia anche una forza viscosa $F_A = -kv_A$ agente nell'estremo A. Determinare la condizione sul parametro λ affinchè la configurazione di equilibrio $\theta = 0$ sia asintoticamente stabile.

B Sia Oxy un sistema di assi cartesiani ortogonali in un piano verticale π, con asse y orientato secondo la verticale ascendente. Un punto materiale P_1 di massa m è vincolato a muoversi in π lungo una circonferenza di centro O e raggio R. Un altro punto materiale P_2 di massa m è vincolato a muoversi in π lungo una circonferenza di centro P_1 e raggio r, $r \leq R$. Infine il punto P_2 è legato all'origine O da una molla di costante elastica h e lunghezza a riposo nulla. Si considerino quali parametri lagrangiani l'angolo θ valutato positivamente in senso anti-orario dal semi-asse positivo delle x alla semiretta individuata dal vettore OP_1, e dall'angolo ϕ valutato positivamente in senso anti-orario dalla semi-retta parallela e concorde all'asse x e di origine P_1 alla semiretta individuata dal vettore P_1P_2.

1) Si determini l'energia potenziale del sistema.

2) Si determini l'energia cinetica del sistema, mettendo chiaramente in evidenza la funzione matrice cinetica $a(\theta, \phi)$.

3) Si verifichi che ci sono quattro configurazioni di equilibrio quando i punti O, P_1, P_2 sono allineati.

3) Posto $g = m = R = r = 1$, si determini sotto quali condizioni su h la configurazione in cui le ordinate di P_1 e di P_2 assumono il loro valore minimo è di equilibrio stabile.

4) Ancora sotto le ipotesi semplificatrici di 3), e per $h = 0$, e si trovino le corrispondenti frequenze delle piccole oscillazioni in quella configurazione stabile.

- *Consegnare le risposte alle parti A e B su fogli separati.*
- *Scrivere nome e cognome* **in stampatello** *su ogni foglio consegnato.*
- *Consegnare solo la bella. Cancellare in modo chiaro ogni pezzo che non deve essere valutato.*
- *Sulla bella rispondere agli esercizi/domande in ordine ed indicare con chiarezza quelli non svolti.*

SOLUZIONI

Esercizio A

1. L'energia potenziale delle forze elastica e gravitazionale, conservative, è

$$U(\theta) = U^g + U^{el} = -mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{h}{2}l^2\cos^2\theta$$

Le configurazioni di equilibrio sono i punti in cui si annulla il gradiente di U

$$\frac{dU}{d\theta} = mg\frac{l}{2}\sin\theta - hl^2\cos\theta\sin\theta = 0.$$

che ha soluzioni

$$\theta_{1,2} = 0, \pi, \qquad \theta_{1,2} = \arccos(\frac{mg}{2hl}) \quad se \quad \lambda = \frac{mg}{2hl} \le 1.$$

Il sistema è soggetto a forze conservative e dissipative. Calcolando la derivata seconda di U e usando TLD si vede che: a) $\theta = \pi$ è sempre instabile, b) $\theta = 0$ è stabile quando $\lambda > 1$ e instabile quando $\lambda < 1$, c) $\theta_{3,4}$ esistono per $\lambda < 1$ e sono stabili, d) per $\lambda = 1$ bisogna studiare le derivate successive di U. Il grafico dell'energia potenziale presenta quindi due massimi e due minimi per $\lambda < 1$.

2. Dobbiamo usare il Primo metodo. La componente lagrangiana della sollecitazione non conservativa (forza di attrito viscoso) è

$$\delta L = F_a \cdot \delta P_A = -kl\dot{\theta}u_\theta \cdot l\delta\theta u_\theta = Q_\theta\delta\theta \qquad Q_\theta = -kl^2\dot{\theta}$$

L'equazione del moto si ricava dall'equazione di Lagrange del sistema, avente energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2$$

ed è

$$\ddot{\theta} = 3\sin\theta(\frac{h}{m}\cos\theta - \frac{g}{2l}) - \frac{3k}{m}\dot{\theta}$$

Scriviamo il sistema al primo ordine e linearizziamolo attorno all'equilibrio $\theta = 0, v = 0$. Si trova

$$X'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3(\frac{h}{m} - \frac{g}{2l}) & -\frac{3k}{m} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono le soluzioni di $\det(X'(0) - \lambda\mathbb{I} = 0$ e tali soluzioni sono

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3k}{2m} \pm \sqrt{(\frac{3k}{2m})^2 + 3(\frac{h}{m} - \frac{g}{2l})}$$

La condizione necessaria e sufficiente su λ per avere $Re(Spec(X'(0)) < 0$ è che $\frac{h}{m} - \frac{g}{2l} < 0$ ovvero $\lambda > 1$. Quindi, l' equilibrio $\theta = 0$ quando è stabile, è asintoticamente stabile non appena $k > 0$.