Fisica Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica - 16 settembre 2009

Attenzione: *Consegnare due (soli) distinti fogli; un foglio, contrassegnato* **A**-Cognome Nome*, con la soluzione dell'esercizio A, un ulteriore foglio contrassegnato* **B**-Cognome Nome*, con la soluzione dell'esercizio B.*

Esercizio B
Sia Oxy un sistema di assi cartesiani ortogonali in un piano verticale π, con asse y orientato secondo la verticale ascendente. Un punto materiale P_1 di massa m è vincolato a muoversi in π lungo una circonferenza di centro O e raggio R. Un altro punto materiale P_2 di massa m è vincolato a muoversi in π lungo una circonferenza di centro P_1 e raggio r, $r \leq R$. Infine il punto P_2 è legato all'origine O da una molla di costante elastica h e lunghezza a riposo nulla. Si considerino quali parametri lagrangiani l'angolo θ valutato positivamente in senso anti-orario dal semi-asse positivo delle x alla semiretta individuata dal vettore OP_1, e dall'angolo ϕ valutato positivamente in senso anti-orario dalla semi-retta parallela e concorde all'asse x e di origine P_1 alla semiretta individuata dal vettore P_1P_2.

1) Si determini l'energia potenziale del sistema.

2) Si determini l'energia cinetica del sistema, mettendo chiaramente in evidenza la funzione matrice cinetica $a(\theta, \phi)$.

3) Si verifichi che ci sono quattro configurazioni di equilibrio quando i punti $O,\ P_1,\ P_2$ sono allineati.

3) Posto $g = m = R = r = 1$, si determini sotto quali condizioni su h la configurazione in cui le ordinate di P_1 e di P_2 assumono il loro valore minimo è di equilibrio stabile.

4) Ancora sotto le ipotesi semplificatrici di 3), e per $h = 0$, e si trovino le corrispondenti frequenze delle piccole oscillazioni in quella configurazione stabile.

Soluzione (traccia):
$OP_1 = (R\cos\theta, R\sin\theta)$
$OP_2 = (R\cos\theta + r\cos\phi, R\sin\theta + r\sin\phi)$
$\mathbf{v}_1 = (-R\sin\theta\ \dot\theta, R\cos\theta\ \dot\theta)$
$\mathbf{v}_2 = (-R\sin\theta\ \dot\theta - r\sin\phi\ \dot\phi, R\cos\theta\ \dot\theta + r\cos\phi\ \dot\phi)$
$\mathcal{U}(\theta, \phi) = mg(2R\sin\theta + r\sin\phi) + \frac{h}{2}|OP_2|^2$
$|OP_2|^2 = R^2 + r^2 + 2Rr(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) = R^2 + r^2 + 2Rr\cos(\theta - \phi)$
$\mathcal{U}(\theta, \phi) = mg(2R\sin\theta + r\sin\phi) + hRr\cos(\theta - \phi) + cost.$

$$\begin{cases} \mathcal{U}_\theta &= 2mgR\cos\theta - hRr\sin(\theta-\phi) \\ \\ \mathcal{U}_\phi &= mgr\cos\phi + hRr\sin(\theta-\phi) \end{cases}$$

Per configurazioni d'equilibrio allineate, cioè con $\theta = \phi + \mathbb{Z}\pi$, si ottengono le soluzioni distinte (θ_E, ϕ_E):

$$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$$

$$\nabla^2\mathcal{U}(\theta_E, \phi_E) = \begin{pmatrix} -2mgR\sin\theta - hRr\cos(\theta-\phi) & hRr\cos(\theta-\phi) \\ \\ hRr\cos(\theta-\phi) & -mgr\sin\phi - hRr\cos(\theta-\phi) \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2\mathcal{U}(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 2mgR - hRr & hRr \\ \\ hRr & mgr - hRr \end{pmatrix}$$

per $g = m = R = r = 1$,

$$\nabla^2\mathcal{U}(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 2-h & h \\ \\ h & 1-h \end{pmatrix}$$

la matrice è definita positiva per:
$2 - h > 0$ & $\det > 0 \quad \Rightarrow h < \frac{2}{3}$

L'energia cinetica del sistema lin. in $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ è

$$T = \frac{1}{2}m \begin{pmatrix} 2R^2 & Rr \\ \\ Rr & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ \\ \dot\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\theta \\ \\ \dot\phi \end{pmatrix}$$

Per $h = 0$, le frequenze di piccola oscillazioni:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2 - 2\omega^2 & -\omega^2 \\ \\ -\omega^2 & 1-\omega^2 \end{pmatrix} \qquad \omega^2_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$$