3 **cognome e nome**: ....

Appello di Fisica Matematica - terza parte - Corso di Laurea Triennale in Matematica - 11 gennaio 2011

Avvertenza: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme al foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome e con il numero 3 messo in evidenza.

• Dimostrare che un diffeomorfismo C^1 di $T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ in sè,

$$(q, p) \mapsto (Q(q, p), P(q, p))$$

è una trasformazione canonica di valenza $c = 1$ se e solo se il determinante della sua matrice Jacobiana è identicamente uguale a 1 (uno).

• Data una superficie S in $\mathbb{R}^3$, definita mediante la rappresentazione parametrica (immersione)

$$\mathbb{R}^2 \supset U \ni (q_1, q_2) \mapsto \widetilde{OP}(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^3$$

scrivere in dettaglio la funzione Lagrangiana $L(q, \dot{q})$ di una particella di massa m vincolata su S senza attrito e in assenza di forze attive.

Dire che relazioni intercorrono tra la formulazione variazionale dei moti dinamicamente possibili per tale particella tra due configurazioni prefissate su S, $q_{(0)}$ e $q_{(1)}$, e il problema della ricerca delle curve tra le medesime configurazioni, che stanno su S, che hanno lunghezza minima (stazionaria).

Soluzione.

$$J(q,p) := \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}$$

La trasformazione è canonica di valenza 1 se e solo se

$$J^T \mathbb{E} J = \mathbb{E}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \det J \\ -\det J & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$