1 **cognome e nome:** ....

Seconda prova parziale di Fisica Matematica 2 - Corso di Laurea Triennale in Matematica - 10 giugno 2010

Attenzione: Questo testo va riconsegnato, con cognome e nome sopra scritto, assieme ad un unico altro foglio (protocollo a 4 facciate) su cui è svolto il compito, anch'esso con cognome e nome.

• Nello spazio $Q = \mathbb{R}^2$ si consideri la trasformazione locale di coordinate

$$\tilde{q}_1 = q_1^2, \qquad \tilde{q}_2 = q_1 + q_2 \tag{$*$}$$

1. Calcolare la trasformazione $(q, v) \mapsto (\tilde{q}, \tilde{v})$ indotta nello spazio tangente TQ dalla $(*)$, e determinare pure la trasformazione indotta nello spazio cotangente T^*Q.
(Si ricordi che i momenti p si trasformano in modo tale che l'operazione di valutazione sui vettori è un invariante scalare.)
2. Dimostrare o confutare che quest'ultima trasformazione sia canonica.

• Un punto materiale di massa M in assenza di forze attive è vincolato sul cono liscio di immersione:

$$(r, \phi) \mapsto (x, y, z) = (r \cos\phi, r \sin\phi, ar), \ \ a > 0$$

Scrivere le equazioni della dinamica per tale sistema.

Dimostrare, o confutare, che se al tempo $t = 0$ si pone il punto materiale in (r_0, ϕ_0), con $r_0 \neq 0$, allora si può raggiungere il vertice del cono solo se la velocità iniziale è parallela al locale meridiano, cioè punta verso il vertice del cono.
(Si ricordi che il cono è una superficie di rivoluzione)

• Sia dato il sistema dinamico in $\mathbb{R}^6$, che negli spazi inerziali si scrive:

$$m_P \ddot{OP} = \mathbf{F}_P(|PS|), \qquad m_S \ddot{OS} = \mathbf{F}_S(|PS|)$$

con

$$\mathbf{F}_P(|PS|) + \mathbf{F}_S(|PS|) = \mathbf{0}.$$

Determinare in dettaglio la riduzione in $\mathbb{R}^3$ nel sistema della *massa ridotta*.

Soluzione esercizio 1. La trasformazione indotta nello spazio tangente TQ è

$$(q, v) \mapsto (\tilde{q}, \tilde{v}) = (\tilde{q}(q), J(q)v), \qquad J(q) = \begin{pmatrix} 2q_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat(2, \mathbb{R})$$

ove $J(q)$ è la matrice Jacobiana della trasformazione $(*)$. La trasformazione indotta nello spazio cotangente avente la proprietà richiesta è

$$(q, p) \mapsto (\tilde{q}, \tilde{p}) = (\tilde{q}(q), J^{-t}(q)p).$$

Per provare che questa trasformazione è canonica possiamo esibire una funzione generatrice di tipo F_2 di tale trasformazione. Questa è

$$F_2(q, \tilde{p}) = \tilde{q}(q) \cdot \tilde{p}.$$

Infatti

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = J^t(q)\tilde{p}, \qquad \tilde{q} = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}} = \tilde{q}(q).$$

La verifica attraverso la condizione $\mathbb{J}\mathbb{E}\mathbb{J}^t = \mathbb{E}$, ove $\mathbb{J} \in Mat(4, \mathbb{R})$ è la matrice Jacobiana della trasformazione nello spazio cotangente, è piu' faticosa ma porta allo stesso risultato.

Soluzione esercizio 2. In assenza di forze attive la lagrangiana si riduce alla parte cinetica

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{r}^2a^2).$$

le equazioni di Lagrange sono quindi

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}) - \frac{\partial T}{\partial r} = M(1 + a^2)\ddot{r} - Mr\dot{\phi}^2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}(Mr^2\dot{\phi}) = 0.$$

Il Teorema di Clairaut sulle geodetiche delle superfici di rivoluzione afferma che

$$r \sin\alpha = cost.$$

I moti spontanei sono, come traiettorie, delle geodetiche e quindi per essi vale il Teorema citato. Quindi non si puo' raggiungere il vertice $(r \to 0^+)$ se $\sin\alpha \neq 0$.