2

Seconda prova parziale di Fisica Matematica 2 - Corso di Laurea Triennale in Matematica - 10 giugno 2010

• Nello spazio $Q = \mathbb{R}^N$ si consideri la trasformazione lineare di coordinate

$$\tilde{q} = Aq \qquad (*)$$

dove A è una matrice non singolare $N \times N$.
1. Calcolare la trasformazione $(q, v) \mapsto (\tilde{q}, \tilde{v})$ indotta nello spazio tangente TQ dalla $(*)$, e determinare pure la trasformazione indotta nello spazio cotangente T^*Q.
(Si ricordi che i momenti p si trasformano in modo tale che l'operazione di valutazione sui vettori è un invariante scalare.)
2. Dimostrare o confutare che quest'ultima trasformazione sia canonica.
Soluzione: Se nelle coordinate q la curva $(-\epsilon, \epsilon) \ni \lambda \mapsto q(\lambda) \in \mathbb{R}^N$ è tale per cui $v = \frac{d}{d\lambda} q(\lambda)|_{\lambda=0}$ allora, la stessa curva, ora in coordinate $\tilde{q}$, sarà: $(-\epsilon, \epsilon) \ni \lambda \mapsto \tilde{q}(\lambda) := Aq(\lambda) \in \mathbb{R}^N$ e dunque $\tilde{v} = \frac{d}{d\lambda}\tilde{q}(\lambda)|_{\lambda=0} = Av$. Infine, dato che dev'essere $\langle p, v\rangle = \langle \tilde{p}, \tilde{v}\rangle$, ne segue che $\tilde{p} = A^{-T}p$. La trasformazione $(q, p) \mapsto (\tilde{q}, \tilde{p}) = (Aq, A^{-T}p)$ è canonica ed una funzione generatrice di tipo F_2 è $F_2(q, \tilde{p}) = \tilde{q}(q) \cdot \tilde{p} = Aq \cdot \tilde{p}$; infatti: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = A^T \tilde{p}$ e $\tilde{q} = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}} = Aq$.
• Un punto materiale in assenza di forze attive è vincolato sul toro liscio di immersione in $\mathbb{R}^3$ $(R > r)$:

$$x = (R + r\cos\theta)\cos\phi, \qquad y = (R + r\cos\theta)\sin\phi, \qquad z = r\sin\theta$$

Verificare che l'equatore massimo esterno percorso con velocità costante è un moto dinamicamente possibile. Consideriamo ora un generico punto su tale equatore e assegnamo una velocità iniziale la cui direzione è una piccola (quanto vogliamo, ma non nulla) deviazione rispetto alla tangente all'equatore stesso. Il moto che ne segue alla fine si avvolgerà sul toro, oppure resterà per sempre confinato vicino all'equatore?
(Si ricordi che il toro è una superficie di rivoluzione)
Soluzione: La rappresentazione delle velocità è data da

$\dot{x} = -r\sin\theta\dot{\theta}\cos\phi - (R + r\cos\theta)\sin\phi\dot{\phi}$
$\dot{y} = -r\sin\theta\dot{\theta}\sin\phi + (R + r\cos\theta)\cos\phi\dot{\phi}$
$\dot{z} = r\cos\theta\dot{\theta}$

pertanto la Lagrangiana è (semplicemente l'energia cinetica):

$L(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m[r^2\dot{\theta}^2 + (R + r\cos\theta)^2\dot{\phi}^2]$

Le equazioni di Lagrange sono:

$r^2\ddot{\theta} + (R + r\cos\theta)r\sin\theta\dot{\phi}^2 = 0 \qquad \frac{d}{dt}[(R + r\cos\theta)^2\dot{\phi}] = 0 \qquad (*)$

pertanto un'orbita equatoriale uniforme esterna è del tipo:

$t \mapsto (\theta(t), \phi(t)) = (0, \phi_0 + \dot{\phi}_0\, t)$

che risolve evidentemente le $(*)$.

Vale il teorema di Clairaut: se indichiamo con $\mathcal{R} := R + r\cos\theta$ la distanza del generico punto sul toro dall'asse di rotazione, ed indichiamo con α l'angolo tra la velocità e il locale meridiano, allora:

$\mathcal{R}\sin\alpha = \textit{costante}$ (integrale primo).

Nell'ipotesi del testo, $\mathcal{R}_0 \sin\alpha_0 = (R + r)(1 - \epsilon) = \mathcal{R}(t)\,\sin\alpha(t) \le \mathcal{R}(t)$

ma vale pure che $\mathcal{R}(t) \leq R+r$: il moto resta confinato in una striscia (piccola con ϵ) attorno all'equatore esterno.

• Data la Lagrangiana di tipo meccanico,
$U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2 - \sum_{i,j=1}^{N} U(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$$

quanti integrali primi Nötheriani possiamo trovare?

Soluzione: Si veda gli appunti, la Lagrangiana è invariante per traslazioni di generica direzione spaziale $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, \lambda) = (\mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{t}, \ldots, \mathbf{x}_N + \lambda \mathbf{t}) \in \mathbb{R}^{3N} \qquad (\star)$$

L'integrale primo associato a $(\star)$ è

$$I = \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i_\alpha} t_\alpha = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{t}$$

e, data l'arbitrarietà di $\mathbf{t}$, si conservano le tre componenti della quantità di moto o momento lineare $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i$.